

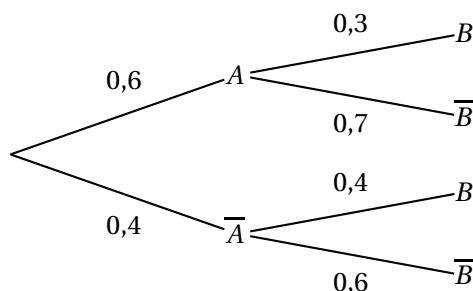
**Sujet 2**

**ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**

**EXERCICE 1**

**5 points**

1. Voici l'arbre des probabilités pondéré par les éléments de l'énoncé :



2. On sait que  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$ .

La probabilité qu'une personne ne chute pas lors des deux premières séances est égale à 0,24.

3.  $\{A; \bar{A}\}$  est un système complet d'évènements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B), \text{ soit}$$

$$P(B) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4 = 0,18 + 0,16 = 0,34.$$

4. D'après la formule de la probabilité conditionnelle :

$$P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{1 - P(B)} = \frac{0,24}{1 - 0,34} = \frac{0,24}{0,66} = \frac{24}{66} = \frac{4}{11} \text{ ou encore :}$$

$$P_{\bar{B}}(\bar{A}) \approx 0,3636, \text{ soit } 0,364 \text{ au millième près.}$$

5. a. On répète 100 fois de façon identique et indépendante l'expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès (ne pas avoir chuté lors des deux premières séances) est égale à 0,24.

La variable aléatoire  $X$  suit donc la loi binomiale de paramètres  $n = 100$  et  $p = 0,24$ .

- b. On a  $P(X \geq 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P(X \leq 19)$  soit d'après la calculatrice  $\approx 1 - 0,145$ , d'où

$$P(X \geq 20) \approx 0,855 \text{ au millième près.}$$

- c. On sait qu'alors  $E(X) = n \times p = 100 \times 0,24 = 24$ .

Ceci signifie qu'en moyenne sur 100 personnes, 24 ne chuteront lors des deux premières séances.

**Partie B**

1. Puisque  $T = T_1 + T_2$ , par linéarité de l'espérance :

$$E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 40 + 60 = 100.$$

Il faut donc attendre en moyenne 100 minutes sur les deux jours.

Les variables aléatoires  $T_1$  et  $T_2$  étant indépendantes on a de même :

$$V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2)$$

Comme  $V(T_1) = \sigma(T_1)^2 = 10^2 = 100$  et que  $V(T_2) = \sigma(T_2)^2 = 16^2 = 256$ , on a donc

$$V(T) = 100 + 256 = 356.$$

2. Soit  $60 < T < 140$  soit en centrant sur l'espérance :

$$60 - 100 < T - 100 < 140 - 100 \iff -40 < T - 100 < 40 \iff |T - 100| < 40 \text{ ou encore } |T - E(T)| < 40.$$

D'après l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev :

$$P(|T - E(T)| \geq 40) \leq \frac{V(T)}{40^2} \iff P(|T - E(T)| \geq 40) \leq \frac{V(T)}{40^2} \iff$$

$$P(|T - E(T)| < 40) \geq 1 - \frac{356}{1600} \iff P(|T - E(T)| < 40) \geq \frac{1244}{1600}.$$

Comme  $\frac{1244}{1600} \approx 0,7775$  qui est supérieur à 0,77, on a finalement :

$$P(60 < T < 140) > 0,77.$$

## EXERCICE 2

5 points

### Partie A

1. Les droites sont sécantes s'il existe un point dont les coordonnées vérifient les équations paramétriques des deux droites, donc s'il existe deux réels  $t$  et  $s$  donnant les mêmes coordonnées avec les deux systèmes d'équations, soit :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t = s \\ y = 2 + t = \frac{3}{2} + s \\ z = 3 - t = 3 - 2s \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{2} + 2t = s \\ 2 + t = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 2t \\ 3 - t = 3 - 2(\frac{3}{2} + 2t) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{2} + 2t = s \\ 2 + t = 3 + 2t \\ 3 - t = -4t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{3}{2} + 2t = s \\ -1 = t \\ 3t = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{2} = s \\ -1 = t \\ t = -1 \end{cases}$$

Ces équations sont compatibles : les équations paramétriques de  $d$  et de  $(d')$  donnent respectivement avec  $t = -1$  et  $s = -\frac{1}{2}$  les mêmes coordonnées  $(-\frac{1}{2}; 1; 4)$  du point commun à ces deux droites.

2. a. On a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : leurs premières coordonnées sont égales mais pas les autres

$$\text{Or } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 - 6 + 4 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 2 + 0 = 0.$$

Conclusion  $\vec{n}$  orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est un vecteur normal à ce plan.

**b.** Le résultat précédent montre que :

$$M(x; y; z) \in (ABC) \iff 1x + 2y + 4z + d = 0, d \in \mathbb{R}.$$

$$\text{En particulier } C(1; 1; 1) \in (ABC) \iff 1 + 2 + 4 + d = 0, d \in \mathbb{R} \iff d = -7.$$

$$\text{Finalement : } M(x; y; z) \in (ABC) \iff x + 2y + 4z - 7 = 0.$$

**3.** A, B et C définissant un plan, il suffit de montrer que S n'appartient pas à ce plan :

$$S\left(-\frac{1}{2}; 1; 4\right) \notin (ABC) \iff -\frac{1}{2} + 2 + 16 - 7 \neq 0 \iff \frac{21}{2} \neq 0 \text{ qui est bien vraie.}$$

**4. a.** Si H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC), alors  $\overrightarrow{SH}$  est un vecteur normal au plan (ABC), donc colinéaire au vecteur  $\vec{n}$ .

$$\text{Or } \overrightarrow{SH} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Avec } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ on a bien } \vec{n} = -2\overrightarrow{SH}.$$

D'autre part on a ;

$$H(-1; 0; 2) \in (ABC) \iff -1 + 2 \times 0 + 4 \times 2 - 7 = 0 \text{ qui est vraie.}$$

Conclusion : le point H(-1; 0; 2) est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).

**b.** De  $\overrightarrow{SH} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$  on en déduit que  $SH^2 = \frac{1}{4} + 1 + 4 = \frac{1}{4} + \frac{20}{4} = \frac{21}{4}$ , d'où  $SH = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$ .

Comme H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) on sait que la distance SH est la plus petite distance de S au plan. Pour tout autre point M distinct de H du plan (ABC), [SM] est l'hypoténuse du triangle rectangle SHM donc le côté le plus long de ce triangle et en particulier  $SM > SH$ , soit  $SM > \frac{\sqrt{21}}{2}$ .

## Partie B

**1.** Si  $M(x; y; z)$ , avec  $\overrightarrow{CS} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ , on a

$$\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS} \iff \begin{cases} x-1 = -\frac{3}{2}k \\ y-1 = 0k \\ z-1 = 3k \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - \frac{3}{2}k \\ y = 1 \\ z = 1 + 3k \end{cases}$$

**2.** (MAB) est rectangle en M si :

(AM) et (BM) sont perpendiculaires soit si  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ .

Avec  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2}k + 1 \\ 1 - 2 \\ 1 + 3k - 1 \end{pmatrix}$  soit  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 2 - \frac{3}{2}k \\ -1 \\ 3k \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2}k - 1 \\ 1 + 1 \\ 1 + 3k - 2 \end{pmatrix}$ , soit  $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}k \\ 2 \\ 3k - 1 \end{pmatrix}$  le produit scalaire s'écrit :

$$-\frac{3}{2}k\left(2-\frac{3}{2}k\right)-2+3k(3k-1)=0 \iff -3k+\frac{9}{4}k^2-2+9k^2-3k=0 \iff$$

$$9k^2+36k^2-24k-8=0 \iff 45k^2-24k-8=0.$$

Pour cette équation du second degré, on a

$$\Delta = 24^2 - 4 \times 45 \times (-8) = 2016 > 0.$$

L'équation a deux solutions :

$$k_1 = \frac{24 + \sqrt{2016}}{90} \approx 0,765 \text{ et } k_2 = \frac{24 - \sqrt{2016}}{90} \approx -0,232.$$

Seul  $k_1 \in [0; 1]$ .

Conclusion : il existe un seul point  $M_1$  du segment  $[CS]$  tel que  $M_1AB$  est un triangle rectangle en  $M_1$ .

*Rem.* Si on remplace  $k$  par la valeur trouvée ci-dessus, on trouve que  $AB^2 = 14$ ,

$$AM_1^2 = 7 \text{ et } BM_1^2 = 7.$$

Le triangle  $M_1AB$  est un triangle rectangle ( $7 + 7 = 14$ ), mais il est aussi isocèle.

### EXERCICE 3

5 points

1. La suite  $(u_n)$  est définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$u_n = \frac{1+5^n}{2+3^n}.$$

**Affirmation 1 :** La suite  $(u_n)$  converge vers  $\frac{5}{3}$ . FAUSSE

En écrivant  $u_n = \frac{1+5^n}{2+3^n} = \frac{\frac{1}{5^n} + 1}{\frac{2}{5^n} + \left(\frac{3}{5}\right)^n}$  et en remarquant que :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^n} = 0$ ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{5^n} = 0$ ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$  car  $0 < \frac{3}{5} < 1$ ;

Donc par somme de limites, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^n} + 1 = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{5^n} + \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

2. On considère la suite  $(w_n)$  définie par :

$$w_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n, w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3.$$

**Affirmation 2 :** Pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_n \geq n$ .

Raisonnement par récurrence :

*Initialisation :*  $w_0 = 0 \geq 0$  : l'inégalité est vraie au rang 0;

*Hérédité :* Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $w_n \geq n$ , alors

$$3w_n \geq 3n \iff 3w_n - 2n \geq 3n - 2n \text{ ou } 3w_n - 2n \geq n \text{ et enfin } 3w_n - 2n + 3 \geq n + 3.$$

Or  $n + 3 = n + 1 + 2$ , donc  $n + 3 > n + 1$  et  $3w_n - 2n + 3 = w_{n+1}$ .

On a donc  $w_{n+1} \geq n+3 > n+1$ , soit par transitivité :  $w_{n+1} \geq n+1$  : l'inégalité est vraie au rang  $n+1$ .

**Conclusion :** l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang  $n$ , elle l'est aussi au rang  $n+1$ ; d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_n \geq n$  : l'affirmation 2 est vraie.

3. L'affirmation est fausse car si  $f$  était convexe sur  $]0; +\infty[$ , elle le serait au point d'abscisse 8 et sa courbe représentative serait au dessus de sa tangente au point A. C'est le contraire d'après le graphique : Affirmation 3 : fausse.
4. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x) - x + 1$ .

Comme somme de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$ ,  $f$  est dérivable sur cet intervalle et  $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ .

On a de façon immédiate :

- $f'(x) = 0 \iff x = 1$ ;
- $f'(x) > 0 \iff x < 1$ , donc sur  $]0; 1[$ ,  $f$  est croissante de moins l'infini à  $f(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$ .
- $f'(x) < 0 \iff x > 1$ , donc  $f$  est décroissante sur  $]1; +\infty[$  de 0 à moins l'infini.

Donc cette fonction est négative puisque son maximum est 0 en  $x = 1$  : l'affirmation 4 est vraie.

#### EXERCICE 4

5 points

##### Partie A

1. Graphiquement on lit que  $f(2) = 15$  : le chariot a parcouru 15 m en 2 secondes.
2. L'équation d  $\Delta$  a une équation  $y = k$ , avec  $k < 23$ .  
Une zone de 23 m de longueur semble suffisante.
3. La tangente en A contient les points de coordonnées (0; 16,5) et (4,7; 21). Son coefficient directeur est donc égal à :  $\frac{21 - 16,5}{4,7 - 0} = \frac{4,5}{4,7} \approx 0,96$ .

##### Partie B

1. a. On considère l'équation différentielle

$$(E') : y' + 0,6y = 0.$$

On sait que les solutions de cette équation (homogène) sont les fonctions définies sur  $]0; +\infty[$  par :

$$t \mapsto f(t) = Ke^{-0,6t}, \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

- b. Si  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(t) = te^{-0,6t}$ , alors

$$g'(t) = e^{-0,6t} - 0,6te^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 0,6t).$$

$$\text{Calculons } g'(t) + 0,6g(t) = e^{-0,6t}(1 - 0,6t) + 0,6 \times te^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 0,6t + 0,6t) = e^{-0,6t} \times 1 = e^{-0,6t}.$$

Comme  $g'(t) + 0,6g(t) = e^{-0,6t}$ ,  $g$  est bien une solution particulière de l'équation (E).

- c. On sait qu'alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions  $f$  définies sur  $]0; +\infty[$  par :

$$t \mapsto f(t) = te^{-0,6t} + Ke^{-0,6t} = e^{-0,6t}(t + K), \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

- d. En particulier la fonction  $v$ , est de cette forme :

$$v(t) = e^{-0,6t}(t + K) \text{ et vérifie } v(0) = 12.$$

$$\text{Or } v(0) = e^{-0,6 \times 0}(0 + K) = 12 \iff 0 + K = 12 \iff K = 12.$$

$$\text{Conclusion : } v(t) = (12 + t)e^{-0,6t}.$$

2. a. Puisque  $v$  est une solution de (E), elle vérifie donc  $v'(t) + 0,6v(t) = e^{-0,6t} \iff v'(t) = e^{-0,6t} - 0,6v(t) \iff v'(t) = e^{-0,6t} - 0,6(12 + t)e^{-0,6t} \iff v'(t) = e^{-0,6t}(1 - 7,2 - 0,6t) = e^{-0,6t}(-6,2 - 0,6t)$ .

- b. Avec l'écriture  $v(t) = 12e^{-0,6t} + \frac{1}{0,6} \times \frac{0,6t}{e^{0,6t}}$ , on a :

$$\bullet \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,6t} = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} 12e^{-0,6t} = 0;$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{0,6t}{e^{0,6t}} = 0 \text{ (puissances comparées au voisinage de plus l'infini) et ensuite}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{0,6} \frac{0,6t}{e^{0,6t}} = 0.$$

Finalement par somme de limites :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$  (ce qui est rassurant : le chariot va s'arrêter).

- c. Puisque  $v'(t) = e^{-0,6t}(-6,2 - 0,6t)$  et comme  $e^{-0,6t} > 0$  quel que soit  $t \in \mathbb{R}$ , le signe de  $v'(t)$  est celui de  $(-6,2 - 0,6t)$ .

$$\bullet -6,2 - 0,6t > 0 \iff -6,2 > 0,6t \iff -62 > 6t \iff -\frac{62}{6} > t \iff t < \frac{62}{6}$$

enfin  $t < \frac{31}{3}$ ;  $v$  est donc croissante sur  $\left[-\infty; -\frac{31}{3}\right[$ ; dans le cadre de l'exercice puisque  $t \geq 0$  ceci ne peut arriver, donc

$$\bullet -6,2 - 0,6t < 0 \iff t > -\frac{62}{6}, \text{ soit en fait pour } t \geq 0, \text{ donc } v \text{ est décroissante sur } ]0; +\infty[ \text{ de } 12 \text{ à } 0.$$

- d. D'où le tableau de variation suivant :

$x$	0		$\alpha$	$+\infty$
$v'(t)$		-		
$v$	12	↘		0

Sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , la fonction  $v$  continue, car dérivable est strictement décroissante de 12 à 0; comme  $1 \in ]0; 12]$ , il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique  $\alpha \in ]0; +\infty[$  tel que  $v(\alpha) = 1$ .

La calculatrice montre que :

$$v(4) \approx 1,5 \text{ et } v(5) \approx 0,85, \text{ donc } 4 < \alpha < 5;$$

$$v(4,6) \approx 1,05 \text{ et } v(4,7) \approx 0,995, \text{ donc } 4,6 < \alpha < 4,7; \text{ à } 0,1 \text{ près on prend } \alpha \approx 4,7.$$

3. D'après la question précédente la vitesse descend à 1 m/s au bout de 4,7 s. Le système d'arrêt se déclenchera donc au bout de 4,7 s.

### Partie C

1. Calcul de l'intégrale :  $d(t) = \int_0^t (12+x)e^{-0,6x} dx$  :

Avec

$$\begin{cases} u(x) = 12+x & v'(x) = e^{-0,6x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -\frac{1}{0,6}e^{-0,6x} \end{cases},$$

et toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur  $[0; t]$ , on peut intégrer par parties :

$$\text{Rappel : } \boxed{\int_0^t u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_0^t - \int_0^t u'(x)v(x) dx.}$$

$$\text{Donc } d(t) = \left[ -(12+x) \times \frac{1}{0,6}e^{-0,6x} \right]_0^t - \int_0^t -\frac{1}{0,6}e^{-0,6x} dx.$$

$$\text{Soit } d(t) = \left[ -(12+x) \times \frac{1}{0,6}e^{-0,6x} \right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{0,6}e^{-0,6x} dx =$$

$$\left[ -(12+x) \times \frac{1}{0,6}e^{-0,6x} \right]_0^t - \frac{1}{0,6} \left[ \frac{1}{0,6}e^{-0,6x} \right]_0^t = \left[ -(12+x) \times \frac{1}{0,6}e^{-0,6x} - \frac{1}{0,36}e^{-0,6x} \right]_0^t.$$

$$\text{Or } \frac{1}{0,6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \text{ et } \frac{1}{0,36} = \frac{100}{36} = \frac{4 \times 25}{4 \times 9} = \frac{25}{9}.$$

$$\text{Soit } d(t) = \left[ -(12+x) \times \frac{5}{3}e^{-0,6x} \right]_0^t - \left[ \frac{25}{9}e^{-0,6x} \right]_0^t = \left[ -e^{-0,6x} \left( \frac{5(12+x)}{3} + \frac{25}{9} \right) \right]_0^t =$$

$$-e^{-0,6t} \left( 20 + \frac{5t}{3} + \frac{25}{9} \right) + 20 + \frac{25}{9} = e^{-0,6t} \left( -\frac{5}{3}t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}.$$

2. On a vu que la vitesse du chariot est à peu près égale à 1 m/s au bout de 4,7 s.

La distance parcourue par le chariot au moment du déclenchement de l'arrêt est donc  $d(4,7) = e^{-0,6 \times 4,7} \left( -\frac{5}{3} \times 4,7 - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9} \approx 20,95$  (m) au centimètre près.

Le dispositif s'arrête se déclenche quand le chariot a parcouru environ 20,95 m.