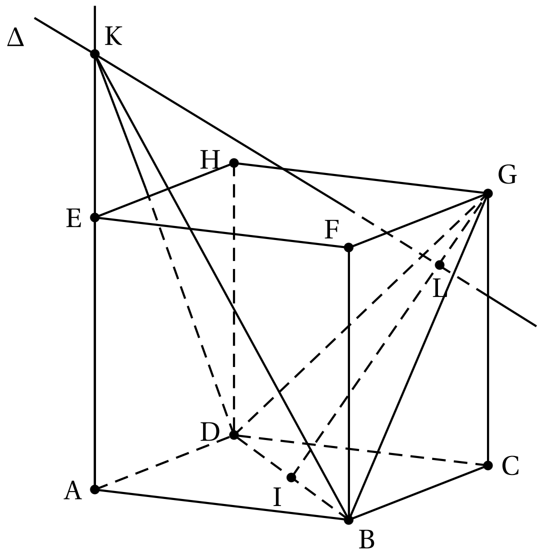
Corrigé du Baccalauréat Métropole Antilles-Guyane

11 septembre 2024

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 6 points

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{\text{IL}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{IG}}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. **a.** D (0 ; 1 ; 0), B (1 ; 0 ; 0), I $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$ et G (1 ; 1 ; 1)

b. • $\overrightarrow{\text{IL}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_\text{L} - x_\text{I} \\ y_\text{L} - y_\text{I} \\ z_\text{L} - z_\text{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\text{L} - \frac{1}{2} \\ y_\text{L} - \frac{1}{2} \\ z_\text{L} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\text{L} - \frac{1}{2} \\ y_\text{L} - \frac{1}{2} \\ z_\text{L} \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{\text{IG}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_\text{G} - x_\text{I} \\ y_\text{G} - y_\text{I} \\ z_\text{G} - z_\text{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\text{IL}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{IG}} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_\text{L} - \frac{1}{2} & = & \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\ y_\text{L} - \frac{1}{2} & = & \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\ z_\text{L} & = & \frac{3}{4} \times 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_\text{L} & = & \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \\ y_\text{L} & = & \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \\ z_\text{L} & = & \frac{3}{4} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_\text{L} & = & \frac{7}{8} \\ y_\text{L} & = & \frac{7}{8} \\ z_\text{L} & = & \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

2. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$.

- $x_\text{B} + y_\text{B} - z_\text{B} - 1 = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$ donc $\text{B} \in \mathscr{P}$.
- $x_\text{D} + y_\text{D} - z_\text{D} - 1 = 0 + 1 - 0 - 1 = 0$ donc $\text{D} \in \mathscr{P}$.

- $x_G + y_G - z_G - 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$ donc $G \in \mathscr{P}$.

Donc le plan (BDG) a pour équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$.

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

a. (BDG) a pour équation $x + y - z - 1 = 0$, donc il a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

La droite Δ est perpendiculaire au plan (BDG) donc elle a le vecteur $\overrightarrow{n}$ comme vecteur directeur. Donc la droite Δ est l'ensemble des points M $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\overrightarrow{LM} = t\,\overrightarrow{n}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{LM} = t\,\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x - \frac{7}{8} &=& t \times 1\\ y - \frac{7}{8} &=& t \times 1\\ z - \frac{3}{4} &=& t \times (-1)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{7}{8} + t\\ y &=& \frac{7}{8} + t\\ z &=& \frac{3}{4} - t\end{array}\right. \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

b. Soit K le point de coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{13}{8}\right)$.

- On regarde si les coordonnées de K vérifient la représentation paramétrique de Δ, autrement dit on cherche s'il existe un réel t tel que ; $\left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& \frac{7}{8} + t\\ 0 &=& \frac{7}{8} + t\\ \frac{13}{8} &=& \frac{3}{4} - t\end{array}\right.$

  Le réel $t = -\dfrac{7}{8}$ convient donc $K \in \Delta$.

- $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{13}{8}\end{pmatrix}$.

  Donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires donc $K \in$ (AE).

Les deux droites Δ et (AE) sont donc sécantes en K.

c.
- $\overrightarrow{IL} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{IG}$ donc $L \in$ (IG) donc $L \in$ (BDG).
- La droite Δ est perpendiculaire au plan (BDG).
- $K \in$ (BDG)

Donc le point L est le projeté orthogonal du point K sur le plan (BDG).

4. **a.** K a pour coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{13}{8}\right)$ et L a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{8}\ ;\ \dfrac{7}{8}\ ;\ \dfrac{3}{4}\right)$. Donc

$$\text{KL}^2 = \left(\frac{7}{8} - 0\right)^2 + \left(\frac{7}{8} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{13}{8}\right)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(-\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64} + \frac{49}{64} + \frac{49}{64} = \frac{147}{64}$$

donc $\text{KL} = \dfrac{\sqrt{147}}{8} = \dfrac{7\sqrt{3}}{8}$

b. On admet que le triangle DBG est équilatéral, donc chaque angle mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

Le point I est le milieu de [BD] donc I est aussi le pied de la hauteur issue de G dans le triangle DBG.

Dans le triangle GIB rectangle en I, on a : $\sin\left(\widehat{\text{IBG}}\right) = \dfrac{\text{IG}}{\text{BG}}$.

BG est la diagonale du carré BCGF de côté 1, donc $\text{BG} = \sqrt{2}$. De même $\text{BD} = \sqrt{2}$.

On a donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\text{IG}}{\text{BG}}$, donc $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\text{IG}}{\sqrt{2}}$ et donc $\text{IG} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

L'aire du triangle BDG vaut : $\dfrac{\text{BD} \times \text{IG}}{2} = \dfrac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c. Le tétraèdre KDBG a pour base le triangle BDG et pour hauteur KL, donc son volume vaut : $\dfrac{1}{3} \times \text{aire(BDG)} \times \text{KL} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{7\sqrt{3}}{8} = \dfrac{7}{16}$

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,a)$.

a. On exprime le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide ABCDK_a en fonction de a.

- La base de la pyramide est le carré ABCD d'aire 1.
- Le point K_a a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,a)$ donc il appartient à la droite (AE) et donc AK_a est la hauteur de la pyramide ABCDK_a.
- De façon évidente, $\text{AK}_a = a$.

Donc $\mathcal{V}_a = \dfrac{1}{3} \times a \times 1 = \dfrac{a}{3}$.

b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& t' \\ y &=& t' \\ z &=& -t'+a \end{array}\right.$ où $t' \in \mathbb{R}$.

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).

Les coordonnées de L_a vérifient le système $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& t' \\ y &=& t' \\ z &=& -t'+a \\ x+y-z-1 &=& 0 \end{array}\right.$

On a donc $t' + t' - (-t' + a) - 1 = 0$ soit $3t' = a + 1$ donc $t' = \dfrac{a+1}{3}$.

$x = t' = \dfrac{a+1}{3}$; $y = t' = \dfrac{a+1}{3}$ et $z = -t' + a = -\dfrac{a+1}{3} + a = \dfrac{-a-1+3a}{3} = \dfrac{2a-1}{3}$

Donc les coordonnées du point L_a sont $\left(\dfrac{a+1}{3}\,;\,\dfrac{a+1}{3}\,;\,\dfrac{2a-1}{3}\right)$.

c. On cherche le volume du tétraèdre GDBK_a.

- $$\text{K}_a\text{L}_a{}^2 = \left(\dfrac{a+1}{3} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{a+1}{3} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{2a-1}{3} - a\right)^2$$
  $$= \left(\dfrac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{-a-1}{3}\right)^2 = 3 \times \dfrac{(a+1)^2}{9} = \dfrac{(a+1)^2}{3}$$
  Donc $\text{K}_a\text{L}_a = \dfrac{a+1}{\sqrt{3}}$.
- Le volume du tétraèdre GDBK_a est :
  $\dfrac{1}{3} \times \text{K}_a\text{L}_a \times \text{aire(GBD)} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{a+1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a+1}{6}$

Le tétraèdre GDBK_a et la pyramide ABCDK_a sont de même volume si et seulement si $\dfrac{a+1}{6} = \dfrac{a}{3}$, soit $\dfrac{a+1}{6} = \dfrac{2a}{3}$, soit $a + 1 = 2a$, et donc si $a = 1$.

Exercice 2 — 5 points

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

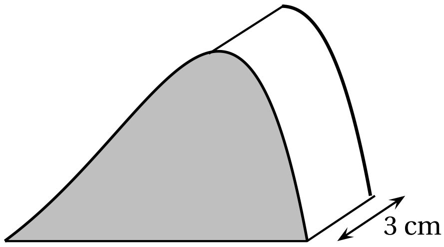


Figure 1

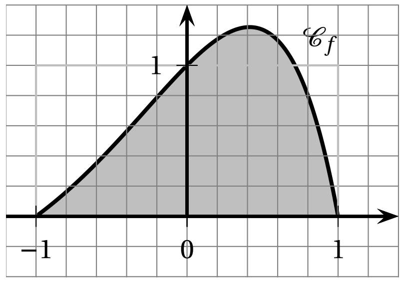


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1~;~1]$ par : $f(x) = \left(1 - x^2\right)\mathrm{e}^{x}$.

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. **a.** Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{x} > 0$, et si $x \in [-1~;~1]$, on a $1 - x^2 \geqslant 0$.

Donc pour tout x de $[-1~;~1]$, on a $f(x) \geqslant 0$.

b. Soit $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose $u(x) = 1 - x^2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{x}$. Donc $u'(x) = -2x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x}$.

Par intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

Donc $I = \left[(1-x^2)\mathrm{e}^{x}\right]_{-1}^{1} - \displaystyle\int_{-1}^{1}(-2x)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 0 + 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

2. Le volume $\mathscr{V}$ de chocolat, en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par : $\mathscr{V} = 3 \times S$ où S est l'aire, en cm^2, de la surface colorée (**Figure 2**).

On calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$ par une intégration par parties.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{x}$. Donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x}$.

$$\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^{x}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 1\times\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^{x}\right]_{-1}^{1} - \left[\mathrm{e}^{x}\right]_{-1}^{1} = \left[1\,\mathrm{e}^{1} - (-1)\,\mathrm{e}^{-1}\right] - \left[\mathrm{e}^{1} - \mathrm{e}^{-1}\right]$$
$$= \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} = 2\,\mathrm{e}^{-1}$$

Donc $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 4\,\mathrm{e}^{-1}$.

$\mathscr{V} = 3 \times S = 12\,\mathrm{e}^{-1}$ donc $\mathscr{V} \approx 4{,}4$ cm^3.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0{,}01~;~+\infty[$ par : $B(q) = 8q^2[2 - 3\ln q] - 3$.

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0{,}01~;~+\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1. **a.**

- $\displaystyle\lim_{q\to+\infty} \ln q = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{q\to+\infty} 2 - 3\ln q = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{q\to+\infty} q^2 = +\infty$

- Donc $\lim\limits_{q \to +\infty} 8q^2[2-3\ln(q)] = -\infty$ et donc $\lim\limits_{q \to +\infty} 8q^2[2-3\ln(q)] - 3 = -\infty$

On a donc démontré que $\lim\limits_{q \to +\infty} B(q) = -\infty$.

b. Pour tout $q \geqslant 0{,}01$: $B'(q) = 8 \times 2q\left(2-3\ln q\right) + 8q^2\left(0 - \dfrac{3}{q}\right) - 0$

$$= 8q\left(4-6\ln q\right) + 8q\left(-3\right) = 8q\left(1-6\ln q\right)$$

c. $q > 0$ donc $B'(q)$ est du signe de $1-6\ln q$.

$1-6\ln q > 0 \iff 1 > 6\ln q \iff \dfrac{1}{6} > \ln q \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{6}} > q$

$\mathrm{e}^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}2 : B\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}\right) \approx 13{,}7 ; B(0{,}01) \approx -3$

On dresse le tableau de variation complet de la fonction B.

q	$0{,}01$		$\mathrm{e}^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}2$		$+\infty$
$B'(q)$		$+$	0	$-$	
$B(q)$	≈ -3	$\nearrow$	$\approx 13{,}7$	$\searrow$	$-\infty$

d. Le maximum de la fonction B est $B\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}\right) \approx 13{,}7$, donc le bénéfice maximum que peut espérer l'artisan est de 137 €.

2. **a.** Sur l'intervalle $[1{,}2 ; +\infty[$:

- La fonction B est dérivable, donc continue, et strictement décroissante.
- Elle décroît de $13{,}7$ à $-\infty$.

Donc, d'après le corollaire des valeurs intermédiaires, l'équation $B(q) = 10$ admet une solution unique sur l'intervalle $[1{,}2 ; +\infty[$. On l'appelle β.

$\left.\begin{array}{l} B(1) = 13 > 10 \\ B(2 \approx -5{,}5 < 10 \end{array}\right\} \implies \beta \in [1 ; 2]$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} B(1{,}5) \approx 11{,}1 > 10 \\ B(1{,}6 \approx 9{,}1 < 10 \end{array}\right\} \implies \beta \in [1{,}5 ; 1{,}6]$

$\left.\begin{array}{l} B(1{,}55) \approx 10{,}17 > 10 \\ B(1{,}56 \approx 9{,}97 < 10 \end{array}\right\} \implies \beta \in [1{,}55 ; 1{,}56]$

$\left.\begin{array}{l} B(1{,}558) \approx 10{,}007 > 10 \\ B(1{,}559 \approx 9{,}986 < 10 \end{array}\right\} \implies \beta \in [1{,}558 ; 1{,}559]$

Donc β a pour valeur approchée $1{,}558$ à 10^{-3} près.

b. On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0{,}01 ; 1{,}2[$.

On donne $\alpha \approx 0{,}757$, et on complète le tableau de variation de B.

q	$0{,}01$		α		$1{,}2$		β		$+\infty$
$B(q)$	-3	$\nearrow$	10	$\nearrow$	$13{,}7$	$\searrow$	10	$\searrow$	$-\infty$

Pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros, le nombre minimal de bonbons au chocolat à vendre correspond à α centaines, soit environ 76, et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre correspond à β centaines, soit environ 156.

Exercice 3 5 points

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :
pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = -0{,}8t_n + 18$.

Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

Pour tout n : $w_{n+1} = t_{n+1} - 10 = -0{,}8t_n + 18 - 10 = -0{,}8t_n + 8 = -0{,}8(t_n - 10)$
$= -0{,}8w_n$

Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $-0{,}8$.

Affirmation 1 vraie

2. Soit la suite (S_n) qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4$.

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \dfrac{S_n}{n}$.

Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.

$n > 0$ donc
$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4$. entraîne $\dfrac{3n-4}{n} \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant \dfrac{3n+4}{n}$ c'est-à-dire $3 - \dfrac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{4}{n}$.

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3 - \frac{4}{n} = 3$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3 + \frac{4}{n} = 3$
- Pour tout $n > 0$: $3 - \dfrac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{4}{n}$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que la suite (u_n) est convergente et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Affirmation 2 vraie

3. Soit la suite (v_n) définie par : $v_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{v_n}$.

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

On va démontrer cette propriété par récurrence.

- **Initialisation**

  Pour $n = 1$: $v_1 = 2$ et $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1+1}{1} = 2$. Donc la propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $v_n = \dfrac{n+1}{n}$ (hypothèse de récurrence).

  $v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{v_n} = 2 - \dfrac{1}{\frac{n+1}{n}} = 2 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2(n+1) - n}{n+1} = \dfrac{2n+2-n}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$
  $= \dfrac{(n+1)+1}{n+1}$

  Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 1, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$. Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Affirmation 3 vraie

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \text{e}^n - n$.

Affirmation 4 : La suite (u_n) converge.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \text{e}^x - x$. Donc $u_n = f(n)$ pour tout n.

Pour $x > 0$, $f(x) = x\left(\dfrac{\text{e}^x}{x} - 1\right)$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x} - 1 = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\text{e}^x}{x} - 1\right) = +\infty$.

On a alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$n ce qui entraîne que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Affirmation 4 fausse

5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n.

```
def u(n) :
    valeur = 2
    for k in range(n) :
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)
    return valeur
```

On admet que (u_n) est décroissante et vérifie pour tout n : $\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

Affirmation 5 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

D'après le script Python, (u_n) est définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & 0{,}5\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \text{ pour tout } n \end{array}\right.$

- La suite (u_n) est décroissante.
- Pour tout n, on a : $\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2$ donc la suite est minorée par $\sqrt{2}$.
- D'après le théorème de la convergence monotone, on peut dire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ tel que $\ell \geqslant \sqrt{2}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$

De l'égalité $u_{n+1} = 0{,}5\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$, on déduit : $\ell = 0{,}5\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right)$.

On résout cette équation.

$\ell = 0{,}5\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right) \iff 2\ell = \ell + \dfrac{2}{\ell} \iff \ell = \dfrac{2}{\ell} \iff \ell^2 = 2 \iff \ell = \sqrt{2}$ ou $\ell = -\sqrt{2}$

On a vu que $\ell \geqslant \sqrt{2}$ donc $\ell = \sqrt{2}$.

Affirmation 5 vraie

Exercice 4 — 4 points

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.

On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Un cachet peut être non conforme, avec la probabilité $p = 0{,}02$, ou conforme.

Un échantillon de 100 cachets correspond à une répétition avec remise de l'expérience qui consiste à tirer un cachet de la production totale.

Donc la variable aléatoire N qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}02$.

2. L'espérance de N est $E(N) = np = 100 \times 0{,}02 = 2$.

Il y a donc, en moyenne, 2 cachets non conformes par boîte.

3. **a.** La probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes est : $P(N = 3) = \binom{100}{3} \times 0{,}02^3 \times (1 - 0{,}02)^{100-3} \approx 0{,}192$.

b. La probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes est la probabilité qu'elle contienne au plus 4 cachets non conformes, c'est-à-dire : $P(N \leqslant 4) \approx 0{,}949$.

4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».

Pour N suivant la loi binomiale de paramètres n, à déterminer, et $p = 0{,}02$, on veut : $P(N = 0) > 0{,}5$. C'est-à-dire : $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \times 0{,}02^0 \times (1 - 0{,}02)^n > 0{,}5$. On résout cette inéquation.

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \times 0{,}02^0 \times (1 - 0{,}02)^n > 0{,}5 \iff 0{,}98^n > 0{,}5 \iff \ln\left(0{,}98^n\right) > \ln(0{,}5)$$

$$\iff n \times \ln(0{,}98) > \ln(0{,}5) \iff n < \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)}$$

$$\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)} \approx 34{,}3$$

Donc le nombre maximum de cachets dans la boîte pour que la probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes soit supérieure à 0,5 est 34.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i, pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i-ème cachet prélevé.

On considère la variable aléatoire S définie par : $S = M_1 + M_1 + \ldots + M_{100}$.

On admet que les variables aléatoires $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{100}$ suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ.

1. Chaque variable aléatoire M_i suit une loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$.

$S = M_1 + M_2 + \ldots + M_{100}$

On utilise la linéarité de l'espérance donc :

$E(S) = E\left(M_1 + M_2 + \ldots + M_{100}\right) = E\left(M_1\right) + E\left(M_2\right) + \ldots + E\left(M_{100}\right) = 100 \times 2 = 200$

La masse de 100 cachets est donc en moyenne de 200 grammes.

2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S.

Chaque variable aléatoire M_i suit une loi de probabilité d'écart-type σ, donc de variance $V(M_i) = \sigma^2$.

Les variables M_i étant indépendantes, on va utiliser l'additivité de la variance :

$V(S) = V(M_1 + M_2 + \ldots + M_{100}) = V(M_1) + V(M_2) + \ldots + V(M_{100}) = 100\sigma^2$

$s = \sqrt{V(S)} = \sqrt{100\sigma^2} = 10\sigma$

3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9, c'est-à-dire que $P(199 < S < 201) > 0{,}9$.

a. $199 < S < 201 \iff 199 - 200 < S - 200 < 201 - 200 \iff -1 < S - 200 < 1$
$\iff |S - 200| < 1$

Donc $P(199 < S < 201) = P(|S - 200| < 1)$

En prenant l'événement contraire :

$P(|S - 200| < 1) > 0{,}9 \iff P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 0{,}1$

b. La variable aléatoire S a pour espérance $E(S) = 200$ et pour variance $V(S) = 100\sigma 2$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

pour tout $\delta \in \left]0\,;+\infty\right[$, $P(|S - E(S)| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(S)}{\delta^2}$,

c'est-à-dire, pour tout $\delta \in \left]0\,;+\infty\right[$, $P(|S - 200| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{100\sigma^2}{\delta^2}$,

On cherche σ pour que $P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 0{,}1$.

On prend $\delta = 1$ donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev devient :

$P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant \dfrac{100\sigma^2}{1^2}$, c'est-à-dire $P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 100\sigma^2$

Il suffit que $100\sigma^2 \leqslant 0{,}1$ donc que $\sigma^2 \leqslant 10^{-3}$, et donc que $\sigma \leqslant \sqrt{10^{-3}}$.

La valeur maximale de σ qui permet d'assurer la condition requise est
$\sigma = \sqrt{10^{-3}} \approx 0{,}031\,6$.