Baccalauréat C Côte d'Ivoire juin 1977

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On sait que : $\begin{cases} 10^3 - 1 = 9 \times 111 \\ 10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13 \end{cases}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $A = 10^{9n} + 2 \cdot 10^{6n} + 2 \cdot 10^{3n} + 1$.

1. Quel est le reste de la division de A par 111 ?
2. On suppose n impair. Montrer que A est divisible par 7, par 11 et par 13.
3. On suppose n pair.
   a. Montrer que $A - 6$ est divisible par 7, par 11 et par 13.
   b. Quel est le reste de la division de A par $111 \times 1\,001$?

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Dans l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3, rapporté à la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on définit une application linéaire pour les égalités suivantes où $(a~;~b) \in X\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} f\left(\vec{\imath}\right) &= \vec{\imath} \\ f\left(\vec{\jmath}\right) &= a\vec{\jmath} + b\vec{k} \\ f\left(\vec{k}\right) &= a\vec{\jmath} - b\vec{k} \end{cases}$$

1. Calculer a et b pour que f soit une symétrie vectorielle ; préciser l'ensemble image et la direction.
2. Calculer a et b pour que f soit un projecteur (c'est-à-dire une application linéaire telle que $f \circ f = f$). Indiquer dans chaque cas l'ensemble des vecteurs invariants et la direction.
3. En supposant que l'espace vectoriel est euclidien et la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormée, calculer a et b pour que f soit une rotation. On donnera l'axe et une mesure de l'angle de cette rotation.

PROBLÈME **11 POINTS**

Question préliminaire :

Soit u la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$u(x) = \text{Log}\,(1 + x)$$

En étudiant la dérivabilité de u au point 0 (zéro), montrer que $\dfrac{\text{Log}\,(1+x)}{x}$ possède une limite quand x tend vers 0.

En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left[x.\text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = 1$.

Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Partie A

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction numérique f_n de la variable réelle x définie par

$$f_n(x) = x^n(1-x).$$

1. Étudier la variation de f.
   Montrer que l'équation dans $\mathbb{R}$: $f_n(x) = 1$ a une seule solution ou aucune suivant la parité de n.
2. Montrer que, sauf pour certaines valeurs particulières de n, les courbes représentatives de f_n ont deux points communs et ont même tangente en chacun de ces points.

Partie B

On se limite dorénavant à la restriction g_n de f_n à l'intervalle $[0; 1]$:

$$\forall x \in [1\ ;\ 1], \quad g_n(x) = x^n(1-x)$$

On appelle (C_n) la courbe représentative de g_n dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé.

1. Montrer que, sauf pour une valeur de n, g_n possède un maximum M_n et que

$$M_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$$

2. Tracer (C_0), (C_1), (C_2) relativement à un repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Donner l'allure de (C_n) pour $n \geqslant 2$; placer (C_{n+1}), par rapport à (C_n), sur un même schéma (position relative des points de même abscisse et des deux points représentatifs du maximum).
3. Calculer successivement :
   a. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M_n$,
   b. $\displaystyle I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\text{d}x$,
   c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$: pouvait-on prévoir ce résultat à l'aide d'un encadrement convenable de $g_n(x)$ et du résultat 3. b. ?
4. On pose $\forall x \in [0\ ;\ 1]$, $\quad \displaystyle S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i(x)\,\text{d}x$ et $\displaystyle J_n = \int_0^1 S_n(x)\,\text{d}x$.
   a. Calculer $S_n(x)$ en fonction de n et de x, puis
   — $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$
   — J_n
   — $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$
   b. Exprimer J_n en fonction de I_0, I_1, …, I_n. En déduire la valeur de la somme

$$s_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n$.

c. Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1\left(\lim_{n\to+\infty} S_n(x)\right)\mathrm{d}x$.

Partie C

On se place à présent dans le corps $\mathbb{C}$ des complexes pour $n\in\mathbb{N}$; on pose :

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad h_n(z)=z^n(1-z).$$

1. n étant différent de 0, résoudre l'équation : $h_n(z)=h_0(z)$.

2. On se propose de résoudre le système suivant :

$$(I)\quad\left\{\begin{array}{lcl} h_n(z) & = & 1\\ |z| & = & |1-z|\end{array}\right.$$

a. Montrer que l'équation a une infinité de solutions.

b. Soit z_0 l'une de ces solutions ; calculer, en fonction du module ρ et de l'argument φ de z_0 l'argument de $1-z_0$, le module et l'argument de $z_0^n(1-z_0)$.

c. En déduire que le système (I) n'admet de solution que si n est congru à 1 modulo 6.

Quel est alors l'ensemble des solutions de ce système ?