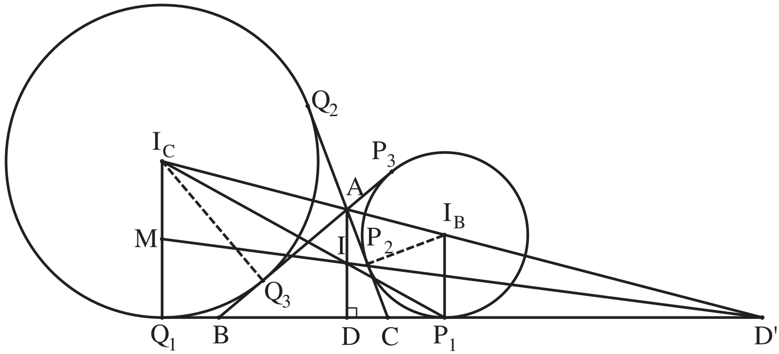
Solution de Miguel Amengual Covas (Cala Figuera, Mallorca, España)



El vértice A es el punto de intersección de las tangentes interiores a las circunferencias de centros I_B y I_C y está, por tanto, sobre la línea de centros I_BI_C.

Sean P_1, P_2, P_3 y Q_1, Q_2, Q_3, respectivamente, los puntos de contacto de la circunferencia de centro I_B y de la circunferencia de centro I_C con BC, CA, AB.

Pues $\angle P_2AI_B = \angle I_BAP_3$ y $\angle P_2AI_B + \angle I_BAP_3 = \angle P_2AP_3 = \angle B + \angle C$ (teorema del ángulo exterior), resulta

$$\angle P_2AI_B = \angle I_BAP_3 = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$$

de donde se sigue que I_BI_C es la bisectriz exterior del ángulo A.

Sea D el pie de la altura correspondiente al vértice A.

Sea I′ el punto de intersección de la diagonal I_BQ_1 con AD.

Pues $\Delta AI_BP_3 \approx \Delta AI_CQ_2$, tenemos

$$\frac{I_BA}{I_BP_1} = \frac{I_BA}{I_BP_3} = \frac{AI_C}{I_CQ_2} = \frac{AI_C}{I_CQ_1}$$

de donde

$$\frac{I_BA}{I_BP_1} \cdot \frac{AI_C}{I_CQ_1} = 1 \qquad (1)$$

Pues $\Delta I_BAI' \approx \Delta I_BI_CQ_1$, tenemos

$$\frac{AI'}{I_CQ_1} = \frac{I_BI'}{I_BQ_1} \qquad (2)$$

Pues $\Delta I_BP_1Q_1 \approx \Delta I'DQ_1$, tenemos

$$\frac{I'D}{I_BP_1} = \frac{I'Q_1}{I_BQ_1} \qquad (3)$$

De (1), (2) y (3) resulta

$$\frac{AI'}{I'D} = \frac{I_BI'}{I'Q_1} \cdot \frac{I_CQ_1}{I_BP_1} = \frac{I_BA}{AI_C} \cdot \frac{I_CQ_1}{AI_C} = 1$$

de donde

$$AI' = I'D$$

es decir, I_BQ_1 biseca el segmento AD.

Análogamente se prueba que I_CQP_1 también biseca AD.

Luego las diagonales del trapecio se cortan en el punto medio I de la altura AD. Esto prueba 1º) .

2º Obsérvese que al ser I_BI_C la bisectriz exterior del ángulo A, el punto D′ es, precisamente, el punto de intersección de I_BI_C con BC.

Si M es el punto de intersección de D′I con I_BP_1, se verifica que

$$\frac{I_BM}{AI} = \frac{D'M}{D'I} = \frac{MP_1}{ID}$$

de donde $I_BM = MP_1$ porque $AI = ID$. Así, pues, M es el punto medio de la base I_BP_1. Análogamente se prueba que D′I biseca la otra base del trapecio.

3º Sean r_B y r_C, respectivamente, los radios de las circunferencias de centros I_B y I_C.

Sea s el semiperímetro de ΔABC y h_A la longitud de la altura correspondiente al vértice A.

Con la notación habitual, se sabe que

$$r_B(s-b) = r_C(s-c) = \frac{1}{2}ah_A \quad (= \text{area de } \Delta ABC)$$

de donde se sigue que

$$\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{s-b}{\frac{1}{2}ah_A} + \frac{s-c}{\frac{1}{2}ah_A} = \frac{2s-b-c}{\frac{1}{2}ah_A} = \frac{a}{\frac{1}{2}ah_A} = \frac{2}{h_A}.$$

Esto prueba 3º).