Solution de Alain Corre (Moulins)

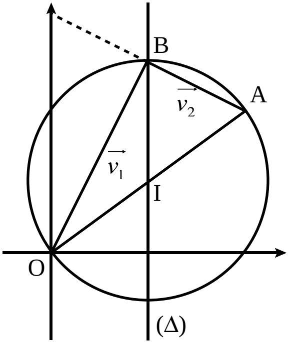
– Soit $x + y\mathrm{i}$ la forme algébrique du nombre complexe z, et soit A le point du plan complexe d'affixe z.

– Soit $\alpha + \beta\mathrm{i}$ la forme algébrique du nombre complexe u_1, et soit $\overrightarrow{v_1}$ le vecteur du plan complexe d'affixe u_1.

– Soit $\alpha' + \beta'\mathrm{i}$ la forme algébrique du nombre complexe u_2, et soit $\overrightarrow{v_2}$ le vecteur du plan complexe d'affixe u_2.

Sachant que $u_1 + u_2 = z$ et que $u_1 - u_2$ est un imaginaire pur, on a : $\alpha = \alpha' = \dfrac{x}{2}$.

Appelons (Δ) la droite du plan complexe d'équation $\mathrm{X} = \dfrac{x}{2}$ et B le point du plan complexe tel que $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{v_1}$. Le point B appartient à (Δ).



La condition $\dfrac{u_1}{u_2}$ est un imaginaire pur entraîne que la différence des arguments de u_1 et u_2 vaut $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π.

Les vecteurs $\overrightarrow{v_1}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ et $\overrightarrow{v_2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ sont donc orthogonaux. Donc B appartient à l'intersection de (Δ) et du cercle de diamètre [OA].

On a donc : $u_1 = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}\mathrm{i} + \dfrac{|z|}{2}\mathrm{i}$; $u_2 = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}\mathrm{i} - \dfrac{|z|}{2}\mathrm{i}$.