

Durée : 4 heures

∞ **Baccalauréat C juin 1975 Dahomey** ∞

**EXERCICE 1**

Soit, dans un espace affine  $\mathcal{A}$  trois points non alignés A, B, C. On désigne par  $G_1$  le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients 3, 2,  $-1$  respectivement, par  $G_2$  celui des points A, B, C affectés des coefficients 2, 1, 1 respectivement.

1. Calculer  $\overrightarrow{G_1G_2}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ . En déduire que  $G_1 \neq G_2$ .
2. À tout point  $M$  de  $\mathcal{A}$ , on fait correspondre le point  $M_1$  tel que :

$$\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

et le point  $M_2$  tel que :

$$\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

- a. Montrer que si  $M$  décrit une droite de  $\mathcal{A}$ , il en est de même de  $M_1$ .
- b. Montrer que le vecteur  $\overrightarrow{M_1M_2}$  reste constant lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{A}$ .

**EXERCICE 2**

1. Soit  $a \in \mathbb{Z}$ . Montrer que l'équation  $6y - 3x = a$  admet des solutions dans  $\mathbb{Z}^2$  si et seulement si  $a$  est multiple de 3.
2. Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  les équations suivantes :

$$6y - 3x = 5, \quad 6y - 3x = 3$$

3. En déduire les solutions dans  $\mathbb{Z}^2$  de l'équation :

$$(6y - 3x - 4)(2y - 3x + 4) = 1.$$

**PROBLÈME**

**Partie A**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 2, muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

1. Soit  $g$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  est :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- a. Montrer que les vecteurs  $\vec{v}$  et  $g(\vec{v})$  sont linéairement indépendants.
- b. Donner la matrice de  $g$  dans la base  $(\vec{v}, g(\vec{v}))$ .
- c. Déterminer  $g \circ g - 2g$ . En déduire que :

$$g^{-1} = 2I_E - g.$$

où  $I_E$  désigne l'application identique de  $E$ .

2. Soit  $\varphi$  un endomorphisme de  $E$  tel qu'il existe deux vecteurs linéairement indépendants  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que :

$$\vec{v} = \varphi(\vec{u})$$

Soit  $N = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

- a. Calculer  $a$  et  $b$ .
- b. Montrer qu'il existe  $\lambda$  et  $\mu$  réels, uniques, tels que

$$\varphi^2 + \lambda.\varphi + \mu I_E = 0_E.$$

$$\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$$

$I_E$  application identique de  $E$

$0_E$  application nulle de  $E$  vers  $E$

3. Soit un endomorphisme de  $E$  tel qu'il existe  $\lambda$  et  $\mu$  réels tels que :

$$\varphi^2 + \lambda.\varphi + \mu I_E = 0_E.$$

- a. Si  $\mu \neq 0$ , montrer que  $\varphi$  admet une application réciproque  $\varphi^{-1}$ , qu'on déterminera.
- b. Si  $\mu = 0$ , montrer que  $\varphi$  n'est pas bijective ou que  $\varphi$  est une homothétie vectorielle.

### Partie B

Soit  $F$  l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R}$

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions  $f$  définies par :

$$f(x) = a(x+1)e^x + b(x-1)e^x$$

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ , dont les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  définies par :

$$f_1(x) = (x+1)e^x \quad \text{et} \quad f_2(x) = (x-1)e^x$$

constituent une base.

2. Soit  $\varphi$  l'application définie sur  $E$  par  $\varphi(f) = f'$  ( $f'$  fonction dérivée de  $f$ ). Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ . Préciser sa matrice dans la base  $(f_1, f_2)$ .

3. **a.** Montrer que  $\varphi(f_1)$  et  $f_1$  sont linéairement indépendants.  
**b.** En déduire qu'il existe  $\lambda$  et  $\mu$ , réels, uniques, tels que :

$$\varphi^2(f) + \lambda\varphi(f) + \mu f = 0$$

pour tout  $f \in E$ .

- c.** Déterminer  $\lambda$  et  $\mu$ .  
**d.** Montrer à l'aide des résultats obtenus en A que  $\varphi$  est bijective et calculer  $\varphi^{-1}$  en fonction de  $\varphi$ .  
En déduire une primitive de  $f_1$ .
4. **a.** Étudier les variations et tracer la courbe représentative de  $f_1$  dans un repère orthonormé.  
**b.** Calculer l'aire du domaine intérieur du contour fermé formé par la courbe représentative de  $f_1$ , l'axe des abscisses et la droite d'équation :  $x = \alpha$ ,  
 $\alpha \in \mathbb{R}$  (2 cas à considérer).