

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Dakar juin 1972 ∞

EXERCICE 1

Soit f la fonction réelle, de variable réelle, qui à x associe $f(x)$ défini par

$$f(x) = \text{Log}(\text{Log } x),$$

où $\text{Log } x$ représente le logarithme népérien de x .

1. Étudier cette fonction et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

(Indication : Pour étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ on pourra poser $\text{Log } x = y$.)

2. Peut-on définir la fonction réciproque, f^{-1} , pour toutes les valeurs de x ? Définir cette fonction et tracer sa représentation graphique dans le même repère.

EXERCICE 2

Soit λ un paramètre réel.

1. Discuter, suivant les valeurs de λ , la nature de la courbe qui a pour équation, en axes rectangulaires,

$$y^2 + \lambda x^2 + (\lambda + 1)x - \frac{\lambda}{4} = 0.$$

2. Donner, le cas échéant, les coordonnées de son centre de symétrie et les équations de ses asymptotes.

PROBLÈME

Soit (E) le plan vectoriel euclidien et soit f l'application de (E) dans (E) qui au vecteur $\vec{v}(x; y)$ associe le vecteur $\vec{V}(X; Y)$ de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où a, b, c et d sont des coefficients réels tels que $bd \neq 0$.

Partie A

1. Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$. Quelles conditions les coefficients a, b, c, d doivent-ils vérifier de façon que, pour tout $\vec{v} \in (E)$, on ait

$$\|f(\vec{v})\| = m \|\vec{v}\|$$

(on note $\|vect v\|$ la norme du vecteur $vect v$)?

Montrer que, si ces conditions sont réalisées, f est un automorphisme de (E) [c'est-à-dire une application linéaire et bijective de (E) dans (E)].

2. Soit $m = 1 + t^2$, où t est un nombre réel. On pose

$$a = 1 - t^2 \quad \text{et} \quad c = -2t.$$

Déterminer b et d de façon que, pour tout $\vec{v} \in (E)$,

$$\|f(\vec{v})\| = m \|\vec{v}\|.$$

On obtient ainsi deux applications, f_1 et f_2 . Nous appellerons f_1 celle pour laquelle b et c sont de signes contraires.

Partie B

1. Soit $\vec{v} \in (E)$. On pose $f_1(\vec{v}) = \vec{V}_1$ et $f_2(\vec{v}) = \vec{V}_2$ avec

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

Soit z, Z_1 et Z_2 les nombres complexes suivants :

$$z = x + iy, \quad Z_1 = X_1 + iY_1 \quad \text{et} \quad Z_2 = X_2 + iY_2$$

On définit ainsi deux applications, φ_1 et φ_2 de \mathbb{C} dans \mathbb{C} (\mathbb{C} est l'ensemble des nombres complexes) par

$$\varphi_1(z) = Z_1 \quad \text{et} \quad \varphi_2(z) = Z_2$$

Montrer qu'il existe un nombre complexe fixe, ξ , tel que $\varphi_1(z) = Z_1 = \xi z$.

Exprimer alors $\varphi_2(z) = Z_2$ en fonction de ξ et de z . Quelle relation existe-t-il entre Z_1 et Z_2 ?

2. On pose $t = \operatorname{tg} \alpha$.
- Déterminer ξ par son module et son argument.
 - Quelle est, suivant la valeur de α , la nature des applications f_1 et f_2 ?
 - Comment doit-on choisir z pour que $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$?

Partie C

Dans le plan complexe, M est l'image de z , M_1 celle de Z_1 , M_2 celle de Z_2 et A celle de $Z_0 = \sqrt{3} + i$.

- Lorsque M décrit le cercle de centre A et de rayon R , définir géométriquement la courbe (\mathcal{C}_1) décrite par M_1 et la courbe (\mathcal{C}_2) décrite par M_2 .
- Comment doit-on choisir α et t pour que (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) soient confondues?