Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Dakar septembre 1969 ∾

EXERCICE 1

Soit α et $\overline{\alpha}$ les racines de l'équation

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Pour quelles valeurs de n, entier naturel, α^n et $\overline{\alpha}^n$ sont-ils réels ?
Calculer $\alpha^n + \overline{\alpha}^n$ pour $n = 1$; $n = 4$; $n = 8$.

EXERCICE 2

Soit l'ensemble E des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = a.\cos x.\cos 2x + b.\sin x.\sin 2x + c.\cos x.$$

Montrer que E, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions par un réel, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, que tout élément de E se met sous la forme

$$f(x) = A.\cos x + B.\cos px,$$

p étant un entier naturel, et que $f(x)$ n'est nulle pour tout x que si $A = B = 0$.

PROBLÈME

On donne, dans le plan, une droite $x'x$ et un point O sur cette droite. On donne aussi un nombre réel α compris entre 0 et π.
On considère la transformation, notée T_n, qui, à tout point M du plan, fait correspondre le point $M' = T_n(M)$ situé sur la parallèle (Δ) menée de M à $x'x$ et tel que

$$\left(\mathrm{O}M, \mathrm{O}M'\right) = n\alpha \quad (\mathrm{mod}\pi),$$

$n \in \mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs.

Partie A

1. Quels sont les points qui n'ont pas de transformé à distance finie ? Le transformé d'un tel point est le point à l'infini sur la droite (Δ) correspondante.
   Quel est le transformé d'un point de $x'x$?
2. α étant fixé, à $n \in \mathbb{Z}$ correspond la transformation T_n. Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des transformations T_n dans le plan privé de $x'x$.
   Montrer que $\mathscr{T}$ est un groupe commutatif pour la composition des transformations.
   Soit $\dfrac{\alpha}{\pi}$ un rationnel : $\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{p}{q}$, p et q étant des entiers naturels. Qu'est la transformation T_q ? Montrer qu'en ce cas v a un nombre fini d'éléments. Montrer, en outre, que si $\dfrac{\alpha}{\pi}$

rationnel, a, sous sa forme irréductible, un dénominateur pair, il existe une transformation T_n involutive.

Application : Dans les cas où

$$\alpha = \frac{3\pi}{8} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{T}$? Quelle est la transformation involutive ?

Montrer que, si $\dfrac{\alpha}{\pi}$ est irrationnel, on ne peut avoir

$$T_n = T_{n'} \quad \text{avec} \quad n \neq n'$$

et qu'ainsi $\mathcal{T}$ correspond uniquement à $\mathbb{Z}$.

Partie B

$x'x$ est l'axe des abscisses et O l'origine d'un repère orthonormé.

Établir les formules de la transformation T_n. Pour cela, on calculera d'abord, en fonction des coordonnées $(x\,;\ y)$ de M, y étant différent de zéro, l'affixe, dans le plan complexe $x\text{O}y$, du point transformé de M par la rotation de centre O et d'angle $n\alpha$; puis on en déduira les coordonnées de M'.

Des formules obtenues, déduire celles de la transformation réciproque T_n^{-1}.

Partie C

On prend $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

1. Écrire les formules des transformations T_1, T_2 et de leurs transformations réciproques.
2. Le point M' étant le transformé de M par T_1 trouver l'ensemble, (C), des points M tels que $\overline{MM'} = \lambda$, λ constante donnée. (On formera l'équation de (C) et on donnera aussi une solution géométrique en utilisant le point de (C) transformé en O.)

   Préciser les éléments de (C) et de $(\text{C}_1) = T_1[(\text{C})]$, transformé de (C) par T_1.
3. Toujours par T_1 on transforme (C_1) en (C_2), puis (C_2) en (C_3). Former, le plus simplement possible, les équations de ces courbes. Donner la nature de la courbe

$$(\text{C}_4) = T_1\,[\text{C}_3)]$$

Partie D

α ayant encore la valeur $\dfrac{\pi}{4}$, appliquer la transformation T_1 à la droite $x = 1$. (On pourra étudier x comme fonction de y.)

Tracer la courbe (H) obtenue.

Pouvait-on connaître, a priori, l'asymptote parallèle à $x'x$ et la direction de l'asymptote oblique ?