

♣ Baccalauréat C Dakar septembre 1983 ♣

EXERCICE 1

Le tableau suivant donne les coûts de production d'une entreprise en fonction du nombre d'unités produites.

Nombre d'unités produites X_i	Coût global de production Y_i
1 000	14 000 000
2 000	20 000 000
3 000	23 000 000
4 000	30 000 000
5 000	37 000 000
6 000	41 000 000
7 000	47 000 000
8 000	51 000 000
9 000	54 000 000
10 000	60 000 000
11 000	63 000 000

1. Construire le nuage de points correspondant.
2. Déterminer les équations des droites de régression.

EXERCICE 2

Dans un plan orienté, rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A et B de coordonnées respectives $(6; 0)$, $(3; \sqrt{3})$ ainsi que la rotation R_1 de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et la rotation R_2 de centre B, d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Un point M quelconque du plan a pour coordonnées $(x; y)$. Donner en fonction de x et y les coordonnées de $R_1(M)$ et celles de $R_2(M)$.

1. Montrer que l'application composée $R_1 \circ R_2$ est une rotation dont on déterminera le centre ω et l'angle.
2. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par A et B. Montrer qu'il existe deux symétries orthogonales s_1 et s_2 par rapport à des droites D_1 et D_2 telles que $R_1 = s_1 \circ s$ et $R_2 = s \circ s_2$. En déduire que $R_1 \circ R_2 = s_1 \circ s_2$. Montrer que D_1 et D_2 sont sécantes en ω .

N. B. : Le candidat peut, s'il le désire, utiliser des nombres complexes pour traiter la question 1.

PROBLÈME

Partie A

Soit \mathcal{P} un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et C la courbe représentative de l'application numérique :

$$f: \begin{cases} \left[0; \frac{\pi}{2}\right] & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto \sqrt{\operatorname{tg} x} \end{cases}$$

1. Étudier l'application f .

f est-elle dérivable en 0? (On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$).

Montrer que

$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad f'(x) = \frac{1 + [f(x)]^2}{2f(x)}.$$

Tracer la courbe C .

2. Montrer que f admet une application réciproque g définie sur \mathbb{R}_+ .

Montrer que g est continue sur \mathbb{R}_+ , dérivable sur \mathbb{R}_+^* avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{2x}{1 + x^4}$$

Déterminer $g(0)$ et $g(1)$.

Tracer la courbe Γ_1 représentant g .

Partie B

On considère la fonction numérique G de la variable réelle x définie sur \mathbb{R} par

$$G(x) = 2 \int_0^x \frac{t}{1 + t^4} dt.$$

1. Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R} avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = \frac{2x}{1 + x^4}$$

Préciser $G(0)$. Quelle est la restriction de G à \mathbb{R}_+ ?

En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t}{1 + t^4} dt$.

2. Étudier la parité de G .

Tracer la courbe représentative Γ de la fonction G .

3. a. Soit $q \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer la somme $\sum_{k=0}^n q^k$ en fonction de q et n .

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=0}^n (-t^4)^k$ et montrer que

$$\frac{t}{1 + t^4} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{4k+1} + (-1)^{n+1} \frac{t^{4n+5}}{1 + t^4},$$

en déduire que

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^4} dt = S_n + R_n$$

avec

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{4^{k+2}} \quad \text{et} \quad R_n = (-1)^{n+1} + \int_0^1 \frac{t^{4n+5}}{1+t^4} dt$$

- b.** Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{t^{4n+5}}{1+t^4} \leq t^{4n+5}$ et que $|R_n| \leq \frac{1}{4n+6}$; en déduire que $\frac{\pi}{8} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Partie C

- 1.** Montrer que, pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(x)}}$ en déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\cos(g(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{et} \quad \sin(g(t)) = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}.$$

- 2.** On considère le mouvement d'un point mobile M de \mathcal{P} dont les coordonnées à l'instant t ($t \in \mathbb{R}_+$) sont

$$\begin{cases} x(t) = \cos(g(t)) \\ y(t) = \sin(g(t)) \end{cases}$$

Déterminer la trajectoire T de M et tracer T .

Préciser le sens du mouvement de M sur sa trajectoire.

- 3.** Exprimer les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ et du vecteur accélération $\overrightarrow{\gamma}(t)$ à l'instant t en fonction de $g(t)$, $g'(t)$ et $g''(t)$.
- 4.** Montrer que le produit scalaire des vecteurs vitesse et accélération est :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \overrightarrow{v}(t) \cdot \overrightarrow{\gamma}(t) = g'(t) \cdot g''(t).$$

Sur quels intervalles le mouvement est-il accéléré (respectivement retardé)?