

## ♣ Baccalauréat mathématiques élémentaires ♣

Dakar juin 1963

### EXERCICE 1

Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x - 5.$$

Construire la courbe représentative; montrer qu'elle admet un centre de symétrie; donner l'équation de la tangente en ce point.

### EXERCICE 2

Déterminer les solutions de l'équation trigonométrique

$$\sin \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{5}$$

comprises entre  $-10000^\circ$  et  $+10000^\circ$ . (L'usage des tables n'est pas nécessaire.)

### EXERCICE 3

Soient un repère cartésien orthonormé,  $x'Ox, y'Oy$ , une longueur donnée  $a$  et le point fixe  $A$ , sur l'axe  $x'Ox$ , d'abscisse  $\frac{4a}{3}$ ;  
M étant un point quelconque de l'axe  $y'Oy$ , on désigne par (M) le cercle de centre M et de rayon égal à  $\frac{1}{2}AM$ .

1. I étant le conjugué de A par rapport au cercle (M) situé sur la droite AM, quel est l'ensemble des points I quand M décrit l'axe  $y'Oy$ ?

Soit D la parallèle à  $x'Ox$  issue de I; elle coupe (M) en deux points,  $P_1$  et  $P_2$ . On appelle  $u$  l'ordonnée de M.

Donner, en fonction de  $u$ , l'équation du cercle (M), l'équation de la droite D, les coordonnées des points  $P_1$  et  $P_2$ .

En déduire l'équation de la courbe (C) décrite par les deux points  $P_1$  et  $P_2$  lorsque M décrit l'axe  $y'Oy$ .

On trouvera

$$y^2 - 3x^2 + \frac{4a^2}{3} = 0.$$

2. Construire cette courbe (C) et préciser ses éléments (sommets, foyers, directrices, asymptotes).

Montrer que la courbe (C) est tangente au cercle (M) aux deux points correspondants,  $P_1$  et  $P_2$ .

3. Soit  $(M')$  le cercle inverse du cercle  $(M)$  dans l'inversion de pôle  $A$  et de puissance  $2a^2$ ; on appelle  $M'$  son centre.

Quel est l'ensemble des points  $M'$  quand  $M$  décrit  $y'Oy$ ?

Calculer le rayon de  $(M')$  en fonction de  $AM'$ .

Montrer que les cercles  $(M')$  restent orthogonaux à un cercle fixe, que l'on précisera, quand  $M$  décrit  $y'Oy$ .

Préciser la position des points  $P'_1$  et  $P'_2$  inverses des points  $P_1$  et  $P_2$ .

Quelle est, en  $P'_1$  (ou  $P'_2$ ), la tangente à la courbe  $(C')$  décrite par ces deux points quand  $M$  décrit  $y'Oy$ ?

Montrer que la droite  $P'_1P'_2$  passe par un point fixe.

En déduire que la courbe  $(C')$  se conserve dans une inversion, que l'on précisera.

La droite  $AP'_1$  (ou  $AP'_2$  recoupe la courbe décrite par  $M'$  en  $h'_1$  (ou  $h'_2$ ). Montrer que la longueur  $P'_1h'_1$  (ou  $P'_2h'_2$ ) est constante et égale à  $a$ .

(Cette propriété pourrait permettre de construire  $(C')$  point par point.)