**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat C Départements d'Outremer juin 1972 ∾

**EXERCICE 1**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $\text{Log}\,(x+3)+\text{Log}\,(x+2)=\text{Log}\,(x+11)$,

(2) $\text{Log}\left(x^2+5x+6\right)=\text{Log}\,(x+11)$,

(3) $\text{Log}\,(-x-2)=\text{Log}\left(\dfrac{-x-11}{x+3}\right)$,

(4) $\text{Log}\,(x+2)=\text{Log}\,(-x-11)-\text{Log}\,(x+3)$.

**EXERCICE 2**

Soit $N$ un entier naturel dont la décomposition en facteurs premiers est $a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}$.

1. Démontrer que la somme $\sigma(N)$ des diviseurs de $N$ est

$$\sigma(N)=\left(1+a+\ldots+a^{\alpha}\right)\left(1+b+\ldots+b^{\beta}\right)\left(1+c+\ldots+c^{\gamma}\right).$$

Appliquer ce résultat au nombre 175.

2. Un entier, $N$, est dit parfait si

$$\sigma(N)=2N.$$

Montrer que si $2^n-1$ est premier, l'entier $N=2^{n-1}\left(2^n-1\right)$ est parfait.

**EXERCICE 2**

Ce problème a pour but l'étude de la famille de courbes $(C_m)$ d'équation

$$\left(m^2-1\right)y^2-2mxy+x^2+2y+3=0.$$

Le repère initial $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ est un repère orthonormé.

**Ce problème se décompose en trois parties A, B et C indépendantes et pouvant être traitées par le candidat dans l'ordre qui lui conviendra. Toutefois, il serait bon de commencer par A.**

**Partie A**

1. *Cas particuliers* : $m=+1$ et $m=-1$.

Écrire les équations de $(C_1)$ et de $(C_{-1})$ sous la forme

$$y=ax+b+\frac{c}{mx-1}$$

($a, b$ et $c$ étant des nombres réels à déterminer).

Étudier succinctement et représenter sur un même graphique, tracé dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les courbes $(C_1)$ et $(C_{-1})$. (On pourra choisir comme unité de longueur 2 cm et l'on emploiera des couleurs distinctes pour chacune des courbes.)

2. *Étude du cas* : $m = 0$

   Démontrer qu'il existe un repère $\left(\omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ par rapport auquel la courbe $(C_0)$ a une équation de la forme

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

   Tracer la courbe $(C_0)$.

3. Démontrer que les trois centres de symétrie, $\Omega_{-1}, \Omega_0$ et $\Omega_1$, des courbes $(C_{-1}), (C_0)$ et $(C_1)$ appartiennent à une droite $(D)$, dont on précisera l'équation par rapport au repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

**Partie B**

On considère maintenant $\left(\text{O}, \vec{I}, \vec{J}\right)$ défini par

$$\vec{I} = \vec{\imath} \quad \text{et} \quad \vec{J} = m\vec{\imath} + \vec{\jmath}.$$

Démontrer que, pour tout $m$, $\left(\text{O}, \vec{I}, \vec{J}\right)$ peut être pris comme nouveau repère.

On désigne par $X$ et par $Y$ les nouvelles coordonnées d'un point $M$ de $(C_m)$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{I}, \vec{J}\right)$.

Quelle forme l'équation de $(C_m)$ prend-elle alors, dans ce nouveau repère ?

En s'inspirant du A 2. en déduire la nature de la famille des courbes $(C_m)$. Quelles sont alors les coordonnées de leur centre de symétrie, $\Omega_m$ dans ce nouveau repère ?

Démontrer que $\Omega_m$ appartient à la droite (D) (considérée dans la question 3. du A.

**Partie C**

Soit $\text{O}'_m$ le point de coordonnées $(m ; 1)$ dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Former l'équation de la famille $(C_m)$ dans le repère $\left(\text{O}'_m, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

2. Vérifier que $\left(C_{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)$ a pour équation, dans le repère $\left(\text{O}'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

$$Y^2 - 2\sqrt{6}XY + 2X^2 + 8 = 0.$$

3. Soit $f$ l'application qui, à tout point $M$ du plan de coordonnées $(x ; y)$, dans le repère $\left(\text{O}'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $\left(x' ; y'\right)$ telles que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2x-\sqrt{6}y,\\ y' & = & -\sqrt{6}x+y. \end{array}\right.$$

Soit $(D_1)$ la droite définie par le point $\mathrm{O}'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}$ et le point $\mathrm{U}_1$ de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\ ;\ \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ et $(D_2)$ la droite définie par le point $\mathrm{O}'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}$ et le point $\mathrm{U}_2$ de coordonnées $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\ ;\ \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

Démontrer que les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ sont globalement invariantes par l'application $f$.

Soit

$$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{\mathrm{O}'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}\mathrm{U}_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{\mathrm{O}'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}\mathrm{U}_2}\ ;$$

former l'équation de $\left(C_{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)$ dans le repère $\left(\mathrm{O}'_{\sqrt{\frac{3}{2}}},\ \overrightarrow{V_1},\ \overrightarrow{V_2}\right)$.