

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Dijon juin 1969 ∞

EXERCICE 1

Étudier la fonction $y = \text{Log} \cos x$.
Tracer la courbe représentative de cette fonction.

EXERCICE 2

Déterminer un nombre n de quatre chiffres, tel que les restes des divisions de 21 685 et 33 509 par n soient respectivement 37 et 53.

PROBLÈME

On donne, dans un plan, un cercle (Γ) de centre O , un point fixe, I , sur (Γ) et une droite (D) ne rencontrant pas (Γ) .

On définit sur l'ensemble des points de (Γ) une loi de composition interne de la manière suivante :

Soit B et C deux points de (Γ) . La droite BC [qui est tangente à (Γ) si B et C sont confondus] ou bien coupe la droite (D) en a , ou bien est parallèle à (D) .

Appelons δ dans le premier cas la droite aI , dans le deuxième cas la parallèle à (D) menée par I . Le composé de B et de C , noté $B \star C$, est alors le deuxième point d'intersection de (Γ) avec δ [si δ est tangente à (Γ) en I , ce point est confondu avec I].

Partie A

1. Montrer que, quels que soient les points B et C de (Γ) , on a

$$B \star C = C \star B.$$

2. Si B est un point quelconque de (Γ) , déterminer le composé $B \star I$. Que peut-on dire du point I vis-à-vis de cette loi de composition ?
3. Si A est un point quelconque de (Γ) , montrer qu'il existe deux points distincts de (Γ) solutions de l'équation

$$X^2 = A.$$

où X est un point inconnu et où X^2 désigne le composé $X \star X$.

4. Montrer que, quels que soient les points A et B de (Γ) , il existe un point X unique de (Γ) tel que l'on ait

$$(1) \quad B \star X = A;$$

en particulier on notera B^{-1} le point de (Γ) tel que $B \star B^{-1} = I$.

Dans le cas où A et B sont quelconques, peut-on déterminer le point X qui vérifie (1), à partir de B^{-1} et de A ?

N. B. Les parties B et C sont indépendantes

Partie B

Soit P et Q les points de Poncelet du faisceau défini par (D) et (Γ).

Soit B et C, deux points de (Γ) et $A' = B \star C$.

Soit B_1, C_1, A'_1, I_1 et Q_1 les transformés des points B, C, A' , I et Q, respectivement, dans l'inversion \mathcal{I} de pôle P et de puissance k^2 (k réel non nul).

1. Montrer que

$$\left(\overrightarrow{Q_1 I_1}, \overrightarrow{Q_1 B_1}\right) + \left(\overrightarrow{Q_1 I_1}, \overrightarrow{Q_1 C_1}\right) = \left(\overrightarrow{Q_1 I_1}, \overrightarrow{Q_1 A'_1}\right) \pmod{2\pi}$$

2. Soit G l'ensemble des nombres complexes de module 1.

a. Montrer que G est un groupe pour la loi « multiplication de deux nombres complexes ».

b. On considère un repère orthonormé (Q_1, \vec{i}, \vec{j}) , d'origine Q_1 où $\vec{i} = \overrightarrow{Q_1 I_1}$.

Si M est un point de (Γ), on désigne par M_1 le transformé de M dans l'inversion \mathcal{I} et par z le nombre complexe dont l'image est M_1 dans le repère considéré.

Montrer que z appartient à G et que l'application φ de (Γ) dans G qui à M associe $\varphi(M) = z$ est bijective.

3. Montrer que, si B et C sont deux points quelconques de (Γ) on a $\varphi(B \star C) = \varphi(B) \star \varphi(C)$.

En déduire que l'ensemble (Γ), muni de la loi \star , est un groupe.

Partie C

Il résulte de la partie B que la loi \star est une loi associative sur (Γ), c'est-à-dire que, pour tout A, pour tout B, pour tout C, l'égalité

$$(2) \quad A \star (B \star C) = (A \star B) \star C$$

est vraie.

Le but de cette partie est de faire établir cette égalité (2), non pour toutes les positions de A, B et C, mais « en général », c'est-à-dire suivant certaines conditions, qu'on précisera.

On posera

$$B \star C = A' \quad \text{et} \quad A \star B = C'$$

1. *Lemme* : Soit (L) et (L') deux cercles sécants en S et T. Une droite passant par S coupe (L) en P et (L') en P'; une droite passant par T coupe (L) en Q et (L') en Q'.

Montrer que les droites PQ et P'Q' sont parallèles.

2. On suppose que les points A, B et C vérifient les conditions suivantes :

- chacun d'eux est distinct de I;
- A est distinct de C;

- la droite BC coupe (D) en a ;
- la droite AB coupe (D) en c .

Montrer que les trois points a , B et I sont distincts et non alignés.

On désigne par (Γ') le cercle circonscrit au triangle aBI . (Γ') recoupe AB en α , IC' en γ , et (D) en a' .

- 3.** On suppose en outre que a' est distinct de c .

Montrer que les trois points a , γ et α sont distincts. Montrer que les droites AA' et CC' ne sont pas parallèles; on désigne par ω leur point de rencontre.

Montrer que les deux triangles $a\gamma\alpha$ et $\omega C'A$ sont homothétiques. (On pourra utiliser le lemme.)

En déduire (dans les conditions envisagées) l'égalité (2).