

## Baccalauréat C Dijon juin 1977

### EXERCICE 1

3 POINTS

On considère l'anneau commutatif  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  dont les éléments sont notés  $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{7}$ .

- Quels sont les éléments inversibles de  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ?  
Montrer qu'ils forment un groupe multiplicatif. Dresser leur table.
- Résoudre dans  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{6}y = \bar{5} \\ \bar{5}x + \bar{2}y = \bar{3}. \end{cases}$$

### EXERCICE 2

5 POINTS

$x$  étant réel, on note  $E(x)$  le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ .

On considère les fonctions :

$$\begin{array}{ll} \varphi: \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} & h: [0; 1] & \rightarrow [0; 1] \\ x & \mapsto x - E(x) & u & \mapsto |2u - 1| \end{array}$$

- Soit  $f = h \circ \varphi$ .  
Démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , que  $f$  admet le réel 1 pour période et est une fonction paire.  
Représenter graphiquement  $f$  dans un plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- Soit  $F$  la restriction de  $f$  au segment  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ .  
Démontrer que  $F$  admet une fonction réciproque  $F^{-1}$  dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image.
- Soit  $g = F^{-1} \circ f$ .  
Démontrer que  $g$  est définie, continue sur  $\mathbb{R}$ , périodique de période 1 et paire.  
 $k$  étant un entier relatif, exprimer  $g(x)$  en fonction de  $x$  et de  $k$  dans les deux cas suivants :

$$x \in \left[ k; k + \frac{1}{2} \right[ \quad x \in \left[ k - \frac{1}{2}; k \right[$$

### PROBLÈME

12 POINTS

#### Partie A

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , de dimension 3,  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de  $E$ .

$m$  étant un réel, soit  $\varphi_m$  l'endomorphisme de  $E$  (application linéaire de  $E$  dans  $E$ ) qui, au vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(x; y; z)$  associe le vecteur  $\vec{u}_1 = \varphi_m(\vec{u})$  de coordonnées  $(x_1; y_1; z_1)$  telles que

$$\begin{cases} x_1 &= 2mx + 3y + mz \\ y_1 &= (2-m)x + (3m-2)y + 6z \\ z_1 &= (m-2)y + 2mz \end{cases}$$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs  $\varphi_m(\vec{i})$ ,  $\varphi_m(\vec{j})$ ,  $\varphi_m(\vec{k})$ .
2. Démontrer que, quel que soit le réel  $m$ , le système de vecteurs  $(\varphi_m(\vec{i}), \varphi_m(\vec{j}))$  est libre. (On pourra étudier d'abord le cas particulier  $m = 2$ , puis  $m \neq 2$ ).
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de  $m$  pour lesquels le système de vecteurs  $(\varphi_m(\vec{i}), \varphi_m(\vec{j}), \varphi_m(\vec{k}))$  est lié. En déduire l'ensemble des valeurs de  $m$  pour lesquelles  $\varphi_m$  est un automorphisme de  $E$ .
4. On suppose  $m = 0$ .  
Déterminer le noyau  $N_0$  de  $\varphi_0$ , l'image  $I_0$  de  $\varphi_0$  et démontrer que  $N_0$  et  $I_0$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .
5. On suppose  $m = 2$ . Prouver que  $\varphi_2$  est bijective et déterminer analytiquement l'application réciproque  $\varphi_2^{-1}$ .

### Partie B

On rappelle que l'ensemble  $\mathcal{F}$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

1. À chaque triplet  $(x; y; z)$  de réels, on associe l'application  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad f(t) = xe^t + yte^t + zt^2e^t$$

$e$  étant la base des logarithmes népériens.

Soit  $E$  l'ensemble des applications  $f$ , démontrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}$  et que les applications  $i, j, k$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies par :

$$\begin{cases} i(t) &= e^t \\ j(t) &= te^t \\ k(t) &= t^2e^t \end{cases}$$

forment une base de l'espace vectoriel  $E$ .  $(x; y; z)$  sont alors les coordonnées de  $f$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

2. On note  $f'$  et  $f''$  les fonctions dérivées première et seconde de  $f$ .  
Calculer pour  $t$  réel,  $f'(t)$  et  $f''(t)$ . En déduire que  $f'$  et  $f''$  sont éléments de  $E$ .
3. On définit l'application  $\psi$  de  $E$  dans  $E$  telle que :

$$\psi(f) = 2f + f' + f''.$$

Démontrer que  $\psi$  est un endomorphisme de  $E$  et déterminer dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  les coordonnées  $x_1, y_1, z_1$  de  $\psi(f)$  en fonction de coordonnées de  $f$ .

En utilisant les résultats de A 5., prouver que  $\psi$  est une bijection de  $E$  sur  $E$  et déterminer  $\psi^{-1}$  sans nouveaux calculs.

4. Soit  $h$  élément de  $E$  définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = (-3 - 6t + 4t^2) e^t$$

Résoudre dans  $E$  l'équation :

$$\psi(f) = h.$$

5. Étudier et représenter graphiquement dans le plan rapporté à un repère orthonormé la fonction  $f$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (1 - 3t + t^2) e^t$$