Baccalauréat C Dijon juin 1979

EXERCICE 1 **3 POINTS**

L'espace affine euclidien de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On considère l'application affine f qui, à tout point M de coordonnées $(x,~y,~z)$ associe le point M' dont les coordonnées $\left(x',~y',~z'\right)$ sont données par

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & y+2\\ y' & = & x-1\\ z' & = & -z \end{array}\right.$$

Démontrer que l'application linéaire associée à f est une rotation vectorielle dont on précisera l'axe et l'angle.
En déduire que f est un vissage.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit α un entier relatif non nul. Pour tout couple $(a,~b)$ d'entiers relatifs, on pose

$$M_{a,~b} = \begin{pmatrix} a & ab\\ b & a \end{pmatrix}$$

et on note A_{α} l'ensemble de ces matrices lorsque $(a,~b)$ décrit $\mathbb{Z}^2$.

1. Démontrer que A_{α} est stable par l'addition et la multiplication des matrices, La multiplication est-elle commutative dans A_{α} ?
2. Démontrer qu'il existe $(a,~b) \neq (0,~0)$ et $(c,~d) \neq (0,~0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ tels que $M_{a,~b} \times M_{c,~d} = M_{0,~0}$.
3. On suppose quail existe β, élément de $\mathbb{Z}$, tel que $\alpha = \beta^2$ Déterminer l'ensemble des couples $(a,~b)$ de $\mathbb{Z}^2$ tels qu'il existe $(c,~d)$ différent de $(0,~0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ avec $M_{a,~b} \times M_{c,~d} = M_{0,~0}$.

PROBLÈME **13 POINTS**

Dans ce problème, e représente la base des logarithmes népériens.

Partie 1

Soit x_0 un réel. On note $I\left(x_0\right)$ l'intégrale :

$$I\left(x_0\right) = \int_0^{x_0} \frac{\left(x_0-t\right)^2}{2}\text{e}^t\,\text{d}t.$$

1. **a.** Sachant que : $\text{e}^t \leqslant \text{e}^{x_0}$ si $t \leqslant x_0$, démontrer sans calculer $I\left(x_0\right)$ que

$$0 \leqslant I\left(x_0\right) \leqslant \text{e}^{x_0}\cdot\frac{x_0^3}{6},\quad \text{si } x_0 \text{ est positif ou nul.}$$

b. Sachant que $\mathrm{e}^t \leqslant 1$, si $t \leqslant 0$,démontrer sans calculer $I(x_0)$ que :

$$0 \leqslant |I(x_0)| \leqslant \frac{|x_0|^3}{6}, \quad \text{si } x_0 \text{ est négatif ou nul.}$$

2. En calculant $I(x_0)$ par intégrations par parties, démontrer que l'on a :

$$\mathrm{e}^{x_0} = 1 + x_0 + \frac{x_0^2}{2} + I(x_0).$$

Partie 2

On note f la fonction numérique de la variable réelle, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser son nombre dérivé en 0 . (On utilisera les résultats de la partie 1).

Démontrer que f', fonction dérivée de f, est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on pourra étudier le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$).

En déduire que $f(x)$ est toujours strictement positif.

3. Tracer la courbe représentative de f dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie 3

1. Démontrer que pour tout x réel non nul, on a :

$xf(x) > x$ et $x\mathrm{e}^x > xf(x)$.

En déduire qu'il existe un unique réel y, compris strictement entre 0 et x tel que : $f(x) = \mathrm{e}^y$ si x est différent de zéro.

2. On définit ainsi une application h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\left\{\begin{array}{lcl} h(0) & = & 0 \\ h(x) & = & y \quad \text{si } x \neq 0 \end{array}\right.$$

Démontrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations (on ne demande pas de représentation graphique).

3. Démontrer que, pour tout x réel non nul, on peut trouver un réel θ et un seul, compris strictement entre 0 et 1, tel que :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x\mathrm{e}^{x\theta}.$$

Vérifier que $\theta = \dfrac{1}{x}\log[f(x)]$.

4. Soit $\widehat{\theta}$ l'application de $\mathbb{R}^{\star}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\widehat{\theta}(x) = \frac{1}{x}\log[f(x)].$$

En remarquant que $\log[f(0)] = 0$, trouver la limite de $\widehat{\theta}$ lorsque x tend vers 0.