

## ∞ Baccalauréat C Dijon juin 1981 ∞

### EXERCICE 1

3 POINTS

On considère la fonction numérique  $g$  de la variable réelle  $x$  telle que

$$g(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right|.$$

1. Étudier l'ensemble de définition et les variations de la fonction  $g$ .  
On désigne par  $\Lambda$  la courbe représentative de  $g$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan. (On prendra 3 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.)
2. Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe  $\Lambda$ . Montrer que  $\Lambda$  admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées dans le repère.
3. Construire  $\Lambda$ .

### EXERCICE 2

3 POINTS

1. Montrer que si deux nombres entiers naturels  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux, il en est de même pour les entiers  $2x + y$  et  $5x + 2y$ .
2. Déterminer dans  $\mathbb{N}^*$  les entiers  $a$  et  $b$  vérifiant

$$\begin{cases} (2a + b)(5a + 2b) = 1620 \\ ab = 3M \end{cases}$$

$M$  étant le plus petit commun multiple de  $a$  et de  $b$ .

### PROBLÈME

14 POINTS

#### Partie A

$E$  désigne un plan vectoriel euclidien. Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sera noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

Dans tout le problème,  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  sont deux vecteurs tels que :

$$\begin{cases} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos \theta, \text{ où } \theta \text{ est un réel appartenant à } ]0; \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base de  $E$ .

$\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  étant des vecteurs de coordonnées respectives  $(\alpha; \beta)$  et  $(\alpha'; \beta')$  dans cette base, exprimer  $\vec{u} \cdot \vec{u}'$  en fonction de ces coordonnées et de  $\theta$ .

2. On note :

$$\vec{i} = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}} (\vec{e}_1 + \vec{e}_2), \quad \vec{j} = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

Démontrer que  $(\vec{i}, \vec{j})$  est une base orthonormée de E.

Déterminer les coordonnées de  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

3. Soit  $f$  l'application de E dans E définie par :

$$\forall \vec{u} \in E, f(\vec{u}) = \frac{1}{2} [(\vec{u} \cdot \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2]$$

Démontrer que  $f$  est un automorphisme de E et déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

### Partie B

$\mathcal{P}$  désigne un plan affine euclidien associé à E. Soit O un point de  $\mathcal{P}$ .  $D_1$  est la droite affine passant par O et de vecteur directeur  $\vec{e}_1$ ,  $D_2$  est la droite affine passant par O et de vecteur directeur  $\vec{e}_2$ .

Pour tout point  $M$  de  $\mathcal{P}$ , on appelle :

$M_1$  la projection orthogonale de  $M$  sur  $D_1$ ;

$M_2$  la projection orthogonale de  $M$  sur  $D_2$ .

Dans toute la suite du problème,  $M'$  désigne le milieu de  $(M_1, M_2)$ .

1. a. Démontrer que :

$$\overrightarrow{OM_1} = (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM_2} = (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2.$$

b. Démontrer que l'application  $g : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$   
 $M \mapsto g(M) = M'$  est une bijection affine dont  $f$  est l'automorphisme associé.

Exprimer les coordonnées  $(x'; y')$  de  $M'$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  en fonction des coordonnées  $(x; y)$  de  $M$  dans le même repère.

c. Préciser la nature des points invariants de  $g$ .

2. Soit  $(C)$  le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image  $(C')$  de  $(C)$  par l'application  $g$ .

Comment faut-il choisir  $\theta$  pour que  $(C')$  soit un cercle? Dans le cas contraire, préciser les coordonnées des foyers de  $(C')$  ainsi que son excentricité.

### Partie C

Soit  $\lambda$  un réel strictement positif. Comment faut-il choisir  $\lambda$  pour qu'il existe des points  $M$  de  $\mathcal{P} - \{O\}$  tels que :

$$\|\overrightarrow{OM'}\| = \lambda \|\overrightarrow{OM}\|?$$

(On pourra ramener ce problème à l'étude d'une équation de la forme  $ax^2 + by^2 = 0$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres dépendants de  $\lambda$  et  $\theta$ .)

En déduire que :

$$\forall M \in \mathcal{P} - \{O\} : \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq \frac{\|\overrightarrow{OM'}\|}{\|\overrightarrow{OM}\|} \leq \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

### Partie D

1. Soit  $\varphi$  l'application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E \times E : \varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot f(\vec{v}).$$

Démontrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ .

2. Démontrer que :

quels que soient les points  $A$  et  $M$  de  $\mathcal{P}$ , d'images respectives  $A'$  et  $M'$  par  $g$ , on a :

a.  $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA'}$

b.  $\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{OM}$ .

3. Soit  $\Delta$  une droite vectorielle de  $E$ . Quel est l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{P}$  tels que le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  soit orthogonal à  $\Delta$ ? (On pourra utiliser D 2. b.).