

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Dijon ∞

EXERCICE 1

4 points

$n$  étant un entier naturel fixé, on considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation

$$(E_n) : 165x - 132y = n.$$

Résoudre cette équation dans les trois cas particuliers :

1.  $n = 33$ .
2.  $n = 66$ .
3.  $n = 42$ .

Dans ces différents cas, on déterminera pour chaque couple  $(x, y)$  solution, le PGCD de  $x$  et  $y$ .

EXERCICE 2

4 points

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine euclidien,  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  un repère orthonormé,  $f$  l'application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe

$$z' = z^2 + iz + 1.$$

1. Déterminer l'ensemble des points  $M$  dont l'image par  $f$  est le point A d'affixe  $3i$ .
2. Soit  $M$  un point de  $\mathcal{E}$  de coordonnées  $x$  et  $y$  et  $M' = f(M)$  de coordonnées  $x'$  et  $y'$  son image par  $f$ . Déterminer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
3. Soit  $\Gamma$  l'ensemble des points  $M$  du plan dont l'image est sur la droite d'équation  $x = -1$ .  
Déterminer une équation cartésienne de  $\Gamma$ .
4. Soit  $\mathcal{C}$  l'image par  $f$  de la droite  $(O, \vec{e}_1)$ . Déterminer une équation cartésienne de  $\mathcal{C}$ .
5. Montrer que  $\Gamma$  et  $\mathcal{C}$  sont des coniques dont on déterminera les éléments remarquables (notamment le centre, les axes, les asymptotes et les sommets lorsqu'ils existent) et que l'on construira.

PROBLÈME

12 points

Soit  $\mathcal{E}$  un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions numériques définies et continues sur  $\mathbb{R}$ . On rappelle que  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  muni de l'addition et de la multiplication par un réel habituelles, est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

*Question préliminaire :* Justifier, pour tout  $f$  élément de  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  et pour tout réel  $x$ , l'existence du réel  $\int_x^{x+1} f(t) dt$ . On note  $F(x)$  ce réel; on construit ainsi une fonction numérique  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$ , associée à  $f$ .

### Partie A

Soit  $\mathcal{V}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  engendré par les fonctions  $f_1, f_2$  et  $f_3$  définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 1 \quad f_2(x) = x; \quad f_3(x) = e^x.$$

1. Montrer que  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $\mathcal{V}$ .
2. Montrer que, si  $f$  est élément de  $\mathcal{V}$ ,  $F$  est élément de  $\mathcal{V}$ .

Soit alors  $\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  l'application définie par

$$\Phi(f) = F.$$

Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{V}$ , et donner l'expression des coordonnées  $a_1, b_1$  et  $c_1$  de  $F$  dans la base  $\mathcal{B}$  en fonction des coordonnées  $a, b$  et  $c$  de  $f$  dans cette même base.

Application : On pose  $f = -f_1 - f_2 + f_3$ . Déterminer  $\Phi(f)$ .

3. Soit  $P$  le plan vectoriel engendré par  $f_1$  et  $f_2$  et  $D$  la droite vectorielle engendrée par  $f_3$ .
  - a. Montrer que ces deux sous-espaces de  $\mathcal{V}$  sont stables par  $\Phi$ , c'est-à-dire que  $\Phi(P) \subset P$  et  $\Phi(D) \subset D$ .
  - b. On définit  $\Phi^1 = \Phi$  et pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\Phi^n = \Phi^{n-1} \circ \Phi$ .  
Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{V}$ , de coordonnées  $a, b$  et  $c$  dans la base  $\mathcal{B}$ , et  $a_n, b_n, c_n$  les coordonnées de  $\Phi^n(f)$  dans cette même base.  
Déterminer  $a_n, b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $a, b$  et  $c$ .

### Partie B

Soit  $f$  et  $F$  les fonctions numériques définies par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) &= e^x - x - 1 \\ F(x) &= (e-1)e^x - x - 2 \end{aligned}$$

1. Montrer que  $F$  est la fonction associée à  $f$  (au sens de la question préliminaire).
2. Étudier les fonctions  $f$  et  $F$  et construire leurs représentations graphiques respectives  $\gamma$  et  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan. (Tracer les deux courbes sur le même dessin).
3. Justifier l'existence, pour tout réel positif  $x$ , d'un réel unique  $c$  de l'intervalle  $[x; x+1]$  tel que

$$\int_x^{x+1} f(t) dt = f(c).$$

4. On définit la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_n^{n+1} f(t) dt = f(c_n)$$

puis la suite  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $\delta_n = c_n - n$ .

- a. Montrer que la suite  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.
- b. En utilisant les courbes  $\gamma$  et  $\Gamma$  du B 2., déterminer graphiquement les points  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$  de l'axe  $(O, \vec{i})$  d'abscisse respective  $c_0, c_1, c_2$ .
- c. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e - 1 - \frac{1}{2e^n} = e^{\delta_n} - \frac{\delta_n}{e^n}.$$

- d. Montrer que la suite  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $\ell$  que l'on déterminera.
- e. Calculer  $F(x) - f(x + \ell)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .  
En déduire une transformation affine  $T$  du plan  $\mathcal{E}$  telle que l'on ait  $T(\gamma) = \Gamma$ . Quelle est la nature de  $T$ ?

Les parties A et B pourront être abordées indépendamment l'une de l'autre. (e désignera dans tout le problème la base des logarithmes népériens).