∽ Baccalauréat C Dijon juin 1983 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

$\mathcal{E}$ est une espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath},~\overrightarrow{k}\right)$. On note E l'espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$.
Soit f l'application affine de $\mathcal{E}$, qui à tout point M de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ associe le point M' dont les coordonnées $\left(x'~;~y'~;~z'\right)$ sont :

$$\left\{\begin{array}{l c l}
x' &=& x+a \quad (a \text{ étant un réel quelconque})\\
y' &=& \dfrac{\sqrt{2}}{2}y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}z+1\\
z' &=& \dfrac{\sqrt{2}}{2}y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z-1-\sqrt{2}
\end{array}\right.$$

1. Montrer que l'endormorphisme φ associé à f est une rotation vectorielle dont on précisera l'axe et l'angle.
2. Discuter, suivant les valeurs de a, la nature de f ; on précisera dans chaque cas les éléments caractéristiques de f.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit dans un plan affine euclidien P un triangle équilatéral ABC dont la mesure d'un côté est a.
On désigne par O le milieu du bipoint (B, C), par G le centre de gravité du triangle ABC et par O$'$ le symétrique de G par rapport à O.

1. Déterminer le barycentre des points G et O respectivement affectés des coefficients -3 et 2.
   Quel est l'ensemble E des points de P tels que :
   $$\left\|-3\overrightarrow{M\text{G}}+2\overrightarrow{M\text{O}}\right\| = \left\|\overrightarrow{M\text{O}'}\right\|$$
2. Déterminer l'ensemble L des points de P tels que :
   $$M\text{B}^2+M\text{C}^2-2M\text{A}^2 = k \quad (k \text{ étant un réel quelconque})$$
   Comment faut-il choisir k pour que cet ensemble contienne le point G ?
3. Démontrer que, quel que soit M appartenant à P :
   $$M\text{A}^2+M\text{B}^2+M\text{C}^2 = 3M\text{G}^2+a^2$$
   Déterminer l'ensemble r des points M tels que :
   $$M\text{A}^2+M\text{B}^2+M\text{C}^2 = 2a^2$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{\left|\dfrac{x-1}{x}\right|}.$$

1. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unité 2 cm. préciser en particulier la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

2. Démontrer que l'application $\begin{array}{rccl} f_1 : &]0\,;\,1] & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & f(x)\end{array}$ est une bijection et déterminer l'application réciproque f_1^{-1}.

Sur une nouvelle figure, représenter f_1 et f_1^{-1} (le repère sera toujours orthonormé, d'unité 2 cm).

3. Soit g la fonction numérique définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

À tout entier naturel positif $n \in \mathbb{N}^\star$, on associe les ensembles Δ_n et Δ'_n définis par :

$$\Delta_n = \left\{M(x\,;\,y)\,;\, \frac{1}{1+n^2} \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{\frac{1-x}{x}}\right\}$$
$$\Delta'_n = \left\{M(x\,;\,y)\,;\, 0 \leqslant x < n \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+n^2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{1+x^2}\right\}$$

a. Montrer que Δ'_n est l'image de Δ_n par une isométrie du plan, que l'on précisera.

b. $\mathscr{A}(\Delta_n)$ désignant l'aire de Δ_n (en cm^2), démontrer que :

$$\mathscr{A}(\Delta_n) = 4\left[\int_0^n g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{n}{1+n^2}\right]$$

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b. Montrer que pour tout réel t :

$$\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$$

et que pour tout réel t non nul :

$$\frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

c. Montrer que $a_1 \leqslant 1$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\star} : \quad \int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 1 - \frac{1}{n}.$$

d. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Partie B

1. Justifier l'existence et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction numérique G définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad G(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit $\mathrm{I} = \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction u définie par :

$$\forall x \in \mathrm{I} : \quad u(x) = \tan x \quad \text{(on note } \tan x \text{ la tangente de} x\text{)}.$$

On pose, pour tout x de I :

$$H(x) = G[u(x)].$$

Démontrer que H est dérivable sur I, déterminer H' ; en déduire H.
Montrer que $G(1) = \frac{\pi}{4}$ et déterminer $\mathscr{A}\left(\Delta_1\right)$.

3. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : \quad h(x) = G\left(\frac{1}{x+1}\right) \quad \text{et} \quad k(x) = G\left(\frac{x}{x+2}\right).$$

a. Montrer que h et k sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer $h' + k'$.

b. Montrer que $G\left(\frac{1}{2}\right) + G\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.