

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Dijon septembre 1971 ∞

EXERCICE 1

On donne dans un plan orienté deux points A et B.

M étant un point quelconque du plan, distinct de A, on construit le carré APMQ de diagonale AM, tel que $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Déterminer les ensembles des points M, des points P et des points Q tels que

$$BP^2 + BQ^2 = 2AM^2.$$

EXERCICE 2

Soit l'équation différentielle du second ordre

$$(E): \quad y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Montrer que, pour qu'une fonction réelle y de la variable réelle x soit solution de (E), il faut et il suffit que la fonction z définie par $y = e^{-x}z$ soit solution d'une équation différentielle du second ordre (E_1).

Résoudre (E_1) et en déduire la solution générale de (E).

PROBLÈME

Soit (Π) un plan orienté rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy, (E) l'ensemble des vecteurs libres de (Π). À tout couple ordonné (\vec{V}_1, \vec{V}_2) d'éléments de (E) on associe le nombre réel noté $\vec{V}_1 \Delta \vec{V}_2$ défini par

$$\vec{V}_1 \Delta \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2).$$

1. Démontrer que, quels que soient les nombres réels λ et μ ,

$$(\lambda \vec{V}_1) \Delta (\mu \vec{V}_2) = (\lambda\mu) (\vec{V}_1 \Delta \vec{V}_2)$$

Soit \vec{u}_1 et \vec{u}_2 deux vecteurs unitaires, tels que

$$(Ox, \vec{u}_1) = \theta_1 \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad (Ox, \vec{u}_2) = \theta_2 \pmod{2\pi}.$$

Calculer $\vec{u}_1 \Delta \vec{u}_2$ en fonction de θ_1 et de θ_2 .

Démontrer que, si $(X_1; Y_1)$ et $(X_2; Y_2)$ sont les composantes respectives des vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sur la base (\vec{i}, \vec{j}) , on a

$$\vec{V}_1 \Delta \vec{V}_2 = X_1 Y_2 - X_2 Y_1.$$

2. On donne dans le plan (Π) les points $M_1(X_1; Y_1)$, $M_2(X_2; Y_2)$, $M_3(X_3; Y_3)$ et $I(x; y)$. Soit \vec{V}_1 , \vec{V}_2 et \vec{V}_3 les vecteurs libres de (Π) ayant pour représentants respectifs les vecteurs \vec{IM}_1 , \vec{IM}_2 et \vec{IM}_3 .

Calculer, en fonction de $x, y, X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3$ et Y_3 la somme

$$S = \frac{1}{2} \left(\vec{V}_1 \Delta \vec{V}_2 + \vec{V}_2 \Delta \vec{V}_3 + \vec{V}_3 \Delta \vec{V}_1 \right).$$

Le nombre réel S est indépendant du point I . On l'appellera l'aire algébrique du triangle orienté $M_1M_2M_3$ et on le notera $\overline{\text{Aire } M_1M_2M_3}$.

Démontrer que $\overline{\text{Aire } M_1M_2M_3} = 0$ si, et seulement si, les points M_1, M_2, M_3 sont alignés.

3. On donne dans le plan (Π) les points $B(2; 0)$ et $C(0; 1)$.

Soit $M(x; y)$ un point quelconque de (π) , P, Q et R les symétriques respectifs de M par rapport aux droites BC, OC et OB .

Calculer $\overline{\text{Aire } PQR}$ en fonction de x et de y . Déterminer l'ensemble des points M du plan (Π) tels que $\overline{\text{Aire } PQR} = \lambda$, nombre réel donné.

Discuter suivant la valeur de λ . Étudier en particulier le cas $\lambda = 0$.

4. Soit (D) et (D') les droites de (Π) d'équations respectives $y = x \operatorname{tg} \alpha$ et

$y = -x \operatorname{tg} \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), N et N' les projections orthogonales du point $M(x; y)$ sur (D) et (D') .

Calculer $\overline{\text{Aire } MNN'}$ en fonction de x, y et α .

Déterminer l'ensemble (H) des points de (Π) tels que $\overline{\text{Aire } MNN'} = k$, nombre réel donné.

Discuter, suivant la valeur de k la nature de la courbe (H) et préciser les éléments qui permettent de la définir.