Baccalauréat C Dijon septembre 1972

Exercice 1

Soit f l'application, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \text{Log}\left[\frac{1+\text{e}^x}{2}\right].$$

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer l'application g, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout x, l'égalité

$$\text{Log}\,[g(x)] = f(x) - x.$$

3. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.
Déduire de la question 2. l'existence d'une droite asymptote à (C) non parallèle à $x'\text{O}x$.
Construire (C).

Exercice 2

1. n est un entier naturel non nul. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $x^n + 1 = 0$.
2. Si p est un entier naturel distinct de 0 et de n, on désigne par δ le P.G.C.D. de n et de p.
Chercher les racines communes aux deux équations

$$x^n + 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^p + 1 = 0.$$

Problème

Dans l'espace vectoriel orienté (E), de dimension 3, rapporté à une base orthonormée directe $\left(\vec{\imath},\,\vec{\imath},\,\vec{k}\right)$, on considère le vecteur $\vec{\omega} = \frac{1}{3}\left(-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}\right)$ et l'application, φ, de (E) dans (E), définie, pour tout vecteur $\vec{v}$ de (E), par

$$\varphi\left(\vec{v}\right) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}.$$

($\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ est le produit vectoriel de $\vec{\omega}$ par $\vec{v}$).

1. **a.** Exprimer les coordonnées de $\varphi\left(\vec{v}\right)$ à l'aide des coordonnées $(x,\,y,\,z)$ de $\vec{v}$ dans la base $\left(\vec{\imath},\,\vec{\imath},\,\vec{k}\right)$. En déduire que φ est un endomorphisme de (E). Quel est le noyau de φ ? Quelle est l'image de φ (notée Im φ) ?

b. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{I} = \dfrac{1}{3}\left(2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} + 2\overrightarrow{k}\right)$ et $\overrightarrow{J} = \dfrac{1}{3}\left(2\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}\right)$ forment une base orthonormée de Im φ et que $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{\omega}\right)$ est une base orthonormée de (E).

Déterminer les vecteurs $\varphi\left(\overrightarrow{I}\right)$, $\varphi\left(\overrightarrow{J}\right)$ et $\varphi\left(\overrightarrow{\omega}\right)$. Montrer que la base $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J},\ \overrightarrow{\omega}\right)$ est directe.

c. Calculer les coordonnées de $\varphi\left(\overrightarrow{v}\right)$ dans la base $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J},\ \overrightarrow{\omega}\right)$, en fonction des coordonnées $(X,\ Y,\ Z)$ de $\overrightarrow{v}$, dans cette même base.

2. Au vecteur $\overrightarrow{v}$ quelconque de (E), on associe, par l'application ψ, le vecteur

$$\psi\left(\overrightarrow{v}\right) = \left(\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{v}\right)\overrightarrow{\omega}.$$

a. Exprimer les coordonnées de $\psi\left(\overrightarrow{v}\right)$ à l'aide des coordonnées $(X,\ Y,\ Z)$ de $\overrightarrow{v}$ dans la base $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J},\ \overrightarrow{\omega}\right)$.

En déduire que ψ est un endomorphisme de (E).

Quel est le noyau de ψ ? Quelle est son image ?

b. Soit $(\varphi+\psi)$ l'endomorphisme de (E). Exprimer $(\varphi+\psi)\left(\overrightarrow{v}\right)$ dans la base $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J},\ \overrightarrow{\omega}\right)$.

Quel est l'ensemble des vecteurs invariants de (E) par

$(\varphi+\psi)$?

En conclure que $(\varphi+\psi)$ est une rotation vectorielle, que l'on précisera.

c. Quels sont les endomorphismes $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$?

3. On appelle θ l'application de (E) dans (E) définie, pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de (E), par

$$\theta\left(\overrightarrow{v}\right) = \left(\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{v}\right)\overrightarrow{v}.$$

a. Définir l'application $\theta \circ \varphi$.

b. Si f est l'application $\varphi \circ \theta$, démontrer que

$$f\left(\overrightarrow{v}\right) = \left(\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{v}\right)\left(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v}\right).$$

Quelles sont les coordonnées de $f\left(\overrightarrow{v}\right)$ dans la base $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J},\ \overrightarrow{\omega}\right)$?

Quel est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{v}$ de (E) tels que $f\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{0}$?

Déterminer l'application $f^2 = f \circ f$.