∽ Baccalauréat C Dijon septembre 1980 ∾

EXERCICE 1

Dans un espace vectoriel euclidien E, de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère l'application linéaire φ de E dans E définie par

$$\varphi\left(\vec{\imath}\right) = \vec{\jmath}, \quad \varphi\left(\vec{\jmath}\right) = \vec{k}, \quad \varphi\left(\vec{k}\right) = -\vec{\imath}.$$

1. Démontrer que φ est une transformation orthogonale.
   Quel est l'ensemble de ses vecteurs invariants ?
2. Démontrer que $\varphi \circ \varphi$ est une rotation vectorielle dont on déterminera l'axe D.
3. On désigne par P le plan vectoriel orthogonal à D. Définir analytiquement la symétrie vectorielle orthogonale σ par rapport à P.
4. Démontrer l'existence d'une rotation vectorielle r d'axe D telle que $\varphi = \sigma \circ r$. Les applications σ et r commutent-elles ?

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel non nul, q un réel distinct de 0, de 1 et de -1. On considère, dans le plan complexe, n points $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ d'affixes respectives $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$.

1. Démontrer que le système de points pondérés

$$\left\{\left(A_k,\, q^k\right) 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$$

   admet un barycentre G_n.
2. On donne

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 1\,; \\ z_1 & = & \cos\dfrac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}\,; \\ z_k & = & (z_1)^k \quad \forall k \in \{1, 2, \cdots, n-1\} \end{array}\right.$$

   a. Déterminer l'affixe z_n de G_n à l'aide de q et z_1.

   b. Calculer la partie réelle X_n et la partie imaginaire Y_n de Z_n.
   $\left(\text{On rappelle que } X_n = \dfrac{Z_n + \overline{Z_n}}{2},\ Y_n = \dfrac{Z_n - \overline{Z_n}}{2}.\right)$
3. **a.** Comment faut-il choisir n pour que Z_n soit réel ?

   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} X_n$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} Y_n$.

PROBLÈME

On désigne par $\mathrm{E}(x)$ (partie entière du réel x), l'entier relatif k tel que $k \leqslant x < k+1$ et par $\mathrm{Log}\, x$ le logarithme népérien de x.
Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f :\longmapsto \left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & \mathrm{E}(x)\mathrm{Log}\, x \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & = & 0. \end{array}\right.$$

Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. Démontrer que f est une fonction croissante sur cet ensemble (on ne cherchera pas à la dériver). Sur quel sous-ensemble est-elle strictement croissante ?
2. Démontrer que pour x supérieur ou égal à 1, $f(x)$ est supérieur ou égal à Log x. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.
4. Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
   a. Étant donné k entier naturel non nul, on désigne par C_k la représentation graphique de la fonction

   $$g_k\,:\,x\longmapsto g_k(x)=k\text{Log}\,x$$

   (x réel strictement positif).
   Construire, dans $\mathscr{R}$, $\text{C}_1,\ \text{C}_2,\ \text{C}_3$.

   b. En déduire la représentation graphique de f sur $[0\,;4]$.

Partie B

1. Démontrer que f est intégrable au sens de Riemann sur tout segment $[0\,;\,A]$ (A étant un réel strictement positif).
2. Démontrer que, pour tout entier naturel k, non nul,

$$\int_k^{k+1} f(x)\,\text{d}x=k\int_k^{k+1}\text{Log}\,x\,\text{d}x=k(k+1)\text{Log}\,(k+1)-k^2\text{Log}\,(k)-k.$$

3. Déduire de 2. que, pour tout n de $\mathbb{N}-\{0\,;\,1\}$:

$$\int_1^n f(x)\,\text{d}x=-\sum_{k=2}^{n}k\text{Log}\,(k)+n^2\text{Log}\,(n)-\frac{n(n-1)}{2}.$$

[On pourra remarquer que $k(k+1)=(k+1)^2-(k+1)$.]

4. **a.** n étant un entier supérieur ou égal à 2, démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 et inférieur ou égal à n :

   $$k\text{Log}\,k\leqslant k\text{Log}\,n.$$

   En déduire que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}k\text{Log}\,k\leqslant\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)\text{Log}\,n.$

   b. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2

   $$\int_1^n f(x)\,\text{d}x\leqslant\int_1^n x\text{Log}\,x\,\text{d}x.$$

   En déduire que

   $$\frac{n^2}{2}\text{Log}\,(n)-\frac{n^2}{4}+\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\leqslant\sum_{k=2}^{n}k\text{Log}\,k.$$

   c. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}k\text{Log}\,k}{\frac{n^2}{2}\text{Log}\,(n)}=1.$