

## ♣ Baccalauréat C Dijon septembre 1979 ♣

### EXERCICE 1

4 POINTS

Soit  $E$  l'anneau  $\mathbb{Z}/39\mathbb{Z}$ . La classe modulo 39 d'un entier  $n$  sera noté  $\overline{n}$ .

1. Soit  $f$  l'application de  $E$  dans  $E$  définie par

$$f(x) = \overline{20}x.$$

- a. Résoudre dans  $E$  l'équation

$$f(x) = \overline{1}.$$

- b. Démontrer que l'application  $f$  est bijective.

2. Soit  $g$  l'application de  $E$  dans  $E$  définie par

$$g(x) = \overline{26}x.$$

- a. Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  l'équation

$$2n - 3p = 0.$$

Résoudre alors dans  $E$  l'équation

$$g(x) = \overline{0}.$$

- b. L'application  $g$  est-elle bijective?

### EXERCICE 2

3 POINTS

Le plan affine  $(P)$  est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . À tout point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$ , on associe son affixe, le nombre complexe  $z = x + iy$  ( $i$  désigne un nombre complexe dont le carré est égal à  $-1$ ).

1. On appelle  $f$  l'application de  $(P)$  dans  $(P)$  qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe

$$z' = -2i\bar{z} + 1 + 2i,$$

où  $\bar{z}$  désigne le complexe conjugué de  $z$ .

Démontrer que  $f$  est une similitude indirecte ayant un centre, le déterminer ainsi que l'axe et le rapport.

2. Soit  $\Omega$  le point d'affixe 1, déterminer l'ensemble  $(C)$  des points  $M$  de  $(P)$  tels que  $\|\overrightarrow{\Omega M'}\| = 2$ .

**PROBLÈME****13 POINTS**

On désigne par  $E$  un espace affine euclidien de dimension 2, par  $V$  l'espace vectoriel associé à  $E$ . Soit  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base orthonormée de  $V$ , on rapporte  $E$  au repère cartésien  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie A**

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 16}.$$

1. Étudier les variations de  $f$ . Quelle est l'image de  $f$ ?
2. Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Démontrer que  $(C)$  admet deux droites asymptotes, l'une d'elles ayant pour équation cartésienne  $y = x + 1$ .  
Préciser la position de  $(C)$  par rapport à ses asymptotes. Tracer  $(C)$ .
3. Démontrer, sans calculs, que  $f$  considérée comme application de  $\mathbb{R}$  sur  $]1; +\infty[$  admet une fonction réciproque, notée  $g$ .  
Vérifier que  $g$  est définie sur  $]1; +\infty[$  par

$$g(x) = x - 1 - \frac{4}{x - 1}.$$

Construire la courbe représentative de  $g$  dans le même repère que  $(C)$ .

4. Calculer l'aire du domaine défini par les conditions

$$3 \leq x \leq 5 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq g(x),$$

puis en déduire l'aire du domaine défini par les conditions

$$0 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq g(x),$$

En déduire la valeur de  $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 16} dx$

**Partie B**

Soit  $I$  le point de coordonnées  $(0; 1)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On appelle  $(C')$  l'image de  $(C)$  dans la symétrie par rapport à  $I$ ,  $(H)$  l'ensemble  $(C) \cup (C')$ . On appelle  $\sigma$  l'application affine qui, à tout point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  associe le point  $M'$  de coordonnées

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -\frac{1}{2}x + y. \end{cases}$$

1. a. Vérifier qu'une équation cartésienne de  $(H)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est

$$y^2 - xy + x - 2y - 3 = 0.$$

- b.** Écrire une équation cartésienne de  $(H')$ , image de  $(H)$  par  $f$ . En déduire la nature de  $(H')$ , son centre, ses sommets, ses asymptotes.
- 2.** On appelle  $\phi$  l'endomorphisme associé à l'application affine  $\sigma$ . On note  $\phi^0$  l'application identique,  $\phi^1$  l'application  $\phi$ ;  $n$  désignant un entier naturel, on désigne par  $\phi^{n+1}$  l'application  $\phi^n \circ \phi$ , où  $\circ$  représente le produit de composition des applications. Démontrer que la matrice de l'application  $\phi^n$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  est du type

$$\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ a_n & 1 \end{pmatrix}$$

où  $a_n$  est le terme général de la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$\begin{cases} a_0 & = & 0 \\ a_{n+1} & = & 2a_n - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit  $(u)$  la suite de terme général  $u_n = a_n - \frac{1}{2}$ . Quelle est la nature de la suite  $(u)$ ?

Exprimer  $u_n$  puis  $a_n$  à l'aide de  $n$ .

- 3.** Soit  $A_0$  le point de  $(C)$  d'abscisse 3. On note  $A_1$  le point  $\sigma(A_0)$ ,  $A_2$  le point  $\sigma(A_1)$ ,  $\dots$ ,  $A_{n+1}$  le point  $\sigma(A_n)$ ,  $n$  étant un entier naturel.
- a.** Calculer les coordonnées du point  $A_n$  et vérifier que les points  $A_0, A_1, \dots, A_n$  sont situés sur une même droite.
- b.** On appelle  $G_n$  le barycentre du système

$$\left\{ (A_0, 1); \left(A_1, \frac{1}{4}\right); \dots; \left(A_p, \frac{1}{4^p}\right); \dots; \left(A_n, \frac{1}{4^n}\right) \right\}$$

Calculer les coordonnées  $(X_n; Y_n)$  de  $G_n$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Les suites  $(X)$  et  $(Y)$  de termes généraux respectifs  $X_n$  et  $Y_n$  sont-elles convergentes?