Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Dijon septembre 1969 ∾

EXERCICE 1

Soit x et y appartenant à $\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels.
Résoudre l'équation

$$9y^2 - (x+1)^2 = 32.$$

EXERCICE 2

1. Résoudre, sur le corps, $\mathbb{C}$, des complexes, l'équation

$$z^2 - (1+2i)z + 3(1+i) = 0,$$

où z est l'inconnue et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
2. Déterminer le module et l'argument des racines.

PROBLÈME

Dans le plan, soit ABC un triangle supposé non rectangle en A et (ω) le cercle de centre ω circonscrit à ce triangle.

Partie A

1. Montrer qu'il existe un cercle unique, (R), centré en R sur AC et passant par A et B et qu'il existe un cercle unique, (S), centré en S sur AB et passant par A et C.
Les deux cercles (R) et (S) se coupent en A et I.
2. Montrer que AI passe par ω.
3. Montrer que les points B, C, S, ω, R et I sont sur un même cercle.

Partie B

On suppose que le triangle ABC est isocèle, avec AB = AC = $2a$; on pose $\widehat{\text{BAC}} = 2\alpha$, avec $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

1. Déterminer en fonction de α l'aire, y, du triangle ωRS. On envisagera les deux cas suivants :

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

2. On suppose $a = 1$; calculer cette aire y en fonction de $x = \operatorname{tg}\alpha$ et étudier la fonction $y = f(x)$ ainsi obtenue.
Construire sa courbe représentative.

Partie C

1. Construire le triangle ABC, connaissant les points R, S et ω. Discuter.
2. Comment faut-il choisir ces points pour que le triangle ABC soit isocèle ?