

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Djibouti juin 1972 ∞

EXERCICE 1

On donne la fonction f , telle que

$$f(x) = x \sin x \quad \text{et } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque, f^{-1} .
2. Étudier la dérivabilité de f et calculer la dérivée de f lorsqu'elle existe.
3. Étudier la dérivabilité de f^{-1} et calculer la dérivée de f^{-1} lorsqu'elle existe.
4. Construire sur un même graphique, le repère étant orthonormé, les courbes représentatives de f et de f^{-1} .

EXERCICE 2

On rappelle que l'ensemble, S , des suites réelles est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . On notera (U_n) une suite et U_n , $n \in \mathbb{N}$, le terme de rang $n + 1$ de la suite (U_n) . On considère l'ensemble (E) des suites (U_n) vérifiant la relation \mathcal{R} :

$$U_n = 5U_{n-1} - 6U_{n-2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, ; 1\}.$$

1. Montrer que (E) est un sous-espace vectoriel de S .
2. On donne la suite géométrique (U_n) telle que $U_n = r^n$. Montrer qu'il existe deux valeurs de r telles que la suite géométrique correspondante soit élément de (E) . On notera ces deux suites (a_n) et (b_n) .
3. Soit $(U_n) \in E$. Montrer qu'il existe α et β réels, tels que

$$\begin{cases} U_0 &= \alpha a_0 + \beta b_0 \\ U_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1 \end{cases}$$

Montrer que $U_n = \alpha a_n + \beta b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En déduire une base de (E) .

PROBLÈME

Notations et questions préliminaires

Si f est une application, on notera f^2 l'application composée, $f \circ f$, et f^3 l'application composée $f \circ f \circ f$.

(E) est un plan vectoriel euclidien et (P) est un plan affine euclidien associé à (E) . Les points O, A, B et C , sont des points de (P) tels que, dans un repère orthonormé, les coordonnées de O sont $(0; 0)$, de $A(1; 0)$, de $C(0; -1)$ et de $B(-1; 1)$.

On note $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$ et $\vec{OC} = c$.

Représenter les points O, A, B et C sur une figure.

Montrer que les systèmes $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ et $\{\vec{b}, \vec{c}\}$ sont deux systèmes libres.

Partie A

- f est une application linéaire de (E) dans (E) telle que $f(\vec{a}) = \vec{b}$ et $f(\vec{b}) = \vec{c}$.
Montrer que le sous-ensemble $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ est invariant par f .
- Montrer que $f^3 = I$ [O étant l'application identique de (E)].
- f est-elle bijective?
- Existe-t-il des vecteurs invariants par f ? Existe-t-il des droites vectorielles invariantes par f ?

Partie B

g est l'application affine de (P) dans (P), associée à f et laissant O invariant :

$$M' = g(M) \iff OM' = f(OM).$$

- Montrer qu'une droite a pour image, par g , une droite.
Quel est la transformée de la droite (AB) ; de la droite (BC) ?
Existe-t-il des droites parallèles à leur transformée?
- Soit \mathcal{R} le repère (O, \vec{a}, \vec{b}) du plan affine (P).
Soit $(x ; y)$ les coordonnées de M dans le repère \mathcal{R} et $(x' ; y')$ celles de M' dans ce repère \mathcal{R} , avec $M' = g(M)$.
Montrer que $\begin{cases} x = y' - x' \\ y = -x' \end{cases}$.
- Montrer que, si une courbe admet O comme centre de symétrie, sa transformée par g admet aussi O comme centre de symétrie.

Partie C

Soit (C) une courbe admettant O comme centre de symétrie, passant par les trois points A, B et C et dont l'équation dans le repère \mathcal{R} est de la forme

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \epsilon y + \varphi = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ et φ étant des nombres réels.

- Montrer que, puisque (C) admet O comme centre de symétrie, on a $\delta = \epsilon = 0$.
En déduire l'équation de (C).
- Former, en utilisant le B 2., l'équation de (C'), transformée de (C) par g . Pouvait-on prévoir le résultat?
- Pour déterminer la nature de (C), on choisit un repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{i}, \vec{b})$, avec $\vec{i} = \vec{a} - \vec{c}$.
Calculer \vec{i} en fonction de \vec{a} et de \vec{b} , puis les coordonnées $(x ; y)$ d'un point M dans le repère \mathcal{R} en fonction de ses coordonnées $(X ; Y)$ dans le repère \mathcal{R}' .
En déduire l'équation de (C) dans le repère \mathcal{R}' et sa nature. Construire la courbe (C).