

🌀 Épreuve anticipée de mathématiques (première) 🌀

Voie générale – avec spécialité – Asie – 15 juin 2026

Corrigé

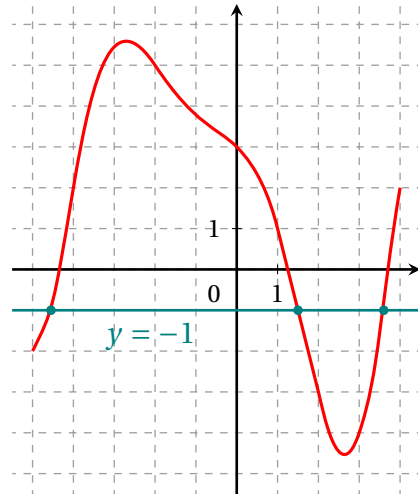
A. P. M. E. P.

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

Question 1

La représentation graphique de f a trois points d'intersection avec la droite d'équation $y = -1$, l'équation $f(x) = -1$ a donc trois solutions.

réponse D.



Question 2

Multiplier par $0,6 = \frac{60}{100} = \frac{100 - 40}{100}$ revient bien à diminuer la quantité de départ de 40 %.

réponse C.

Question 3

La droite passe par les points $(0;2)$ et $(6;0)$, donc son ordonnée à l'origine est 2, et sa pente $\frac{0-2}{6-0} = -\frac{1}{3}$.

réponse C.

Question 4

Il y a 130 enfants, dont 80 pratiquent le volley-ball, donc $P_E(V) = \frac{80}{130} = \frac{8}{13}$.

réponse A.

Question 5

A et $\bar{A}$ partitionnent l'univers. D'après la loi des probabilités totales, on a :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,1 = 0,12 + 0,06 = 0,18.$$

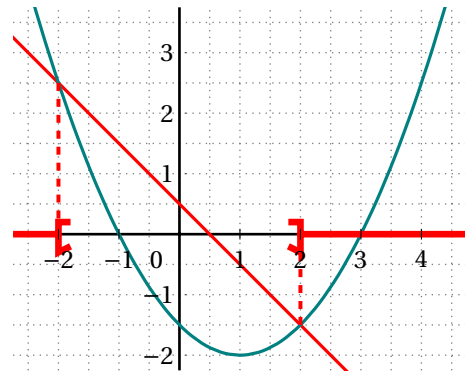
réponse B.

Question 6

Comme on sait que f est une fonction affine, elle est représentée par une droite, et comme g est une fonction polynôme du second degré, elle est représentée par une parabole, ce qui permet d'identifier les fonctions et leurs courbes représentatives.

La droite représentant f est au-dessous de la parabole représentant g pour des valeurs de x inférieures à -2 ou bien supérieures à 2 , donc la solution de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est $S =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

réponse B.



Question 7

x ne peut pas être égal à 3 car la fonction inverse ne s'annule jamais.

$$\begin{aligned} x = 3 + \frac{5}{y} &\iff x - 3 = \frac{5}{y} \\ &\iff \frac{1}{x - 3} = \frac{y}{5} \\ &\iff y = \frac{5}{x - 3} \end{aligned}$$

réponse D.

Question 8

Additionnons les effectifs : $3 + 1 + 2 + 2 + 2 = 10$.

Il y a 10 valeurs, donc la médiane est entre les 5^e et 6^e valeurs, qui sont toutes deux 20 : en clair, $Me = 20$. Ici, on n'a même pas besoin de calculer exactement la moyenne (mais on pourrait le faire, la division par 10 est simple).

Toutes les valeurs sont positives et il y a deux valeurs qui valent 100, donc la somme de toutes les valeurs est strictement supérieure à 200, et la moyenne est donc strictement supérieure à 20.

En conclusion, $Me < \bar{x}$.

réponse C.

DEUXIÈME PARTIE (14 pts)

Exercice 1 (7 points)

Partie A – Étude d'un modèle discret

1. 1% de 1 100 c'est 11, donc on a $u_1 = 1\,100 - 11 = 1\,089$.

Cela signifie que, selon ce modèle, le niveau du lac sera de 1 089 m au-dessus du niveau de la mer en 2021.

2. a. Diminuer une quantité de 1% revient à multiplier celle-ci par 0,99.

Puisque pour tout entier n , le niveau à l'année $n + 1$ est 1% en dessous de celui à l'année n , la relation de récurrence de la suite (u_n) est : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,99u_n$.

b. La relation de récurrence est multiplicative, (u_n) est donc une suite géométrique, de raison 0,99.

c. On connaît l'expression explicite d'une suite géométrique : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1\,100 \times 0,99^n$.

3. Selon ce modèle, le niveau atteint en 2028 sera égal à $1\,100 \times 0,99^8$.

Remarque : Avec une calculatrice, on arrive à environ 1 015 m : ce lac risque d'être complètement asséché, puisque son niveau aura diminué de 85 m, ce qui est la profondeur maximale estimée d'un des plus grands lacs de retenue d'Europe, le barrage de Serre-Ponçon dans les Hautes-Alpes.

4. Ici, on cherche donc l'indice n du premier terme de la suite (u_n) qui sera « en dessous de 1 020 m ».

On va choisir d'interpréter « en dessous de 1 020 m » comme signifiant « inférieur ou égal à 1 020 m ».

Le programme est initialisé avec les variables u et n contenant respectivement u_0 et 0.

Tant que le terme stocké dans la variable u n'est pas inférieur ou égal à 1 020, autrement dit, tant qu'il est strictement supérieur à 1 020, on va passer à l'indice suivant (c'est la ligne $n = n + 1$), et au terme suivant, en appliquant la relation de récurrence.

Voici le programme complété :

```
u = 1100
n = 0
while u > 1020:
    n = n + 1
    u = u*0.99
print(n)
```

Partie B – Étude d'un modèle continu

1. 2020 correspond à l'année 0, on calcule $f(0)$:

$$f(0) = 1\,050 e^{-0,01 \times 0} + 50 = 1\,050 e^0 + 50 = 1\,050 \times 1 + 50 = 1\,100.$$

Ce modèle donne un niveau calculé à 1 100 m en 2020, ce qui est cohérent avec l'observation.

2. On sait que la dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto e^{ax}$, où a est un réel est $x \mapsto a e^{ax}$.

On a donc, pour tout réel positif t : $f'(t) = 1\,050 \times (-0,01) \times e^{-0,01t} + 0$

soit, après simplification, $f'(t) = -10,5 e^{-0,01t}$.

3. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f'(t) < 0$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

4. La production est impossible si le niveau du lac s'abaisse en-dessous de 1 020 m d'altitude. C'est ce qui se produira, selon ce modèle, à partir de 2028 (année 8 sur le graphique).



Exercice 2 (7 points)

Partie A – Étude d'un cercle

1. Un point $M(x; y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si la distance AM (donc la norme du vecteur $\overrightarrow{AM}$) est égale à $\frac{\sqrt{37}}{2}$.

Il faut donc que $\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 = \frac{37}{4}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et donc $\|\overrightarrow{AM}\|^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2$.

Une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ est donc $(x-3)^2 + (y-1)^2 = \frac{37}{4}$.

2. On vérifie si les coordonnées de B vérifient cette équation : $(6-3)^2 + (0,5-1)^2 = 3^2 + (-0,5)^2 = 9 + 0,25 = 9,25$.

Or $9,25 = \frac{37}{4}$, donc B appartient à $\mathcal{C}$.

Partie B – Étude d'un cas particulier

1. L'équation de $\mathcal{H}$ est $y = \frac{3}{x}$, donc pour $x = 6$, on obtient $y = \frac{3}{6} = 0,5$, qui est bien l'ordonnée de B, qui appartient donc à $\mathcal{H}$.

2. a. Les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et celles de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} 3 \\ -0,5 \end{pmatrix}$.
- b. On a donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 3 + 1 \times (-0,5) = 2,5$.
- c. L'angle $\widehat{DAB}$ n'est pas un angle droit, en effet s'il l'était, le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ serait nul.

Partie C – Étude du cas général

1. On calcule $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 = 2^2$.

Le discriminant est strictement positif, l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont $\frac{4-2}{2} = 1$ et $\frac{4+2}{2} = 3$.

2. $\widehat{DAM}$ est un angle droit si et seulement si A et M sont deux points distincts vérifiant $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. (les points doivent être distincts, sinon A et M ne définissent pas une droite, et donc l'angle $\widehat{DAM}$ n'est pas défini).

On connaît déjà les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$, et celles de $\overrightarrow{AM}$ sont $\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$.

La condition s'écrit donc $x - 3 + y - 1 = 0$.

Sachant que $y = \frac{3}{x}$, cette équation devient $x - 3 + \frac{3}{x} - 1 = 0$ soit, après multiplication par $x \neq 0$: $x^2 - 4x + 3 = 0$

On sait que cette équation a deux solutions : la solution $x = 3$ est évidemment sans intérêt : le produit scalaire dans ce cas est nul puisque A et M sont confondus.

Il reste la solution $x = 1$: le point M (1 ; 3) est le seul point de $\mathcal{H}$ tel que $\widehat{DAM}$ soit un angle droit.