

∞ Épreuve anticipée de mathématiques (première) ∞
 Voie générale – avec spécialité – Polynésie française – 2026

Corrigé du sujet de remplacement

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 points)

Question 1 Réponse D

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$(2x - 6)(x + 4) = 0 \iff 2x - 6 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -4.$$

D'où $S = \{-4 ; 3\}$.

Question 2 Réponse B

Le dé est équilibré : on est en situation d'équiprobabilité. Les issues strictement supérieures à 4 sont 5 et 6, soit 2 issues favorables sur 6 :

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Question 3 Réponse C

On applique $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ avec $3 = 3^1$:

$$\frac{3}{3^5} = 3^{1-5} = 3^{-4}.$$

Question 4 Réponse D

La droite D_4 passe par les points de coordonnées $(-1 ; 0)$ et $(0 ; 1)$. Son ordonnée à l'origine est $b = 1$ et son coefficient directeur vaut $a = \frac{1-0}{0-(-1)} = 1$. Son équation réduite est donc $y = x + 1$.

Question 5 Réponse B

Un point appartient à $\mathcal{C}_f$ lorsque son ordonnée est l'image de son abscisse. Pour $H(-3 ; 28)$:

$$f(-3) = 2 \times (-3)^2 - 3 \times (-3) + 1 = 18 + 9 + 1 = 28.$$

Le point H appartient donc à $\mathcal{C}_f$.

Question 6 Réponse B

On réduit d'abord la parenthèse au même dénominateur :

$$E = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{5} = \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Question 7 Réponse C

Une hausse de 10 % correspond au coefficient multiplicateur 1,10 et une baisse de 20 % au coefficient 0,80. Le coefficient multiplicateur global est le produit des deux :

$$1,10 \times 0,80 = 0,88 = 1 - 0,12.$$

Le prix a subi une baisse de 12 %.

Question 8 Réponse C

Toutes les grandeurs sont strictement positives :

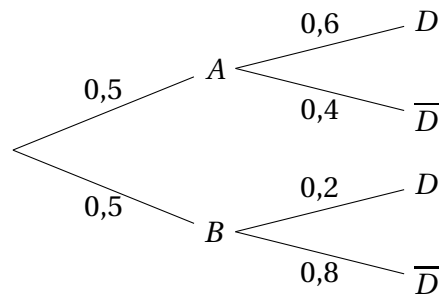
$$g = \frac{Gm}{r^2} \iff r^2 g = Gm \iff r^2 = \frac{Gm}{g} \iff r = \sqrt{\frac{Gm}{g}}.$$

DEUXIÈME PARTIE (14 points)

Exercice 1 (4 points)

La pièce est équilibrée : $P(A) = P(B) = 0,5$. On a $P_A(D) = 0,6$ et $P_B(\overline{D}) = 0,8$.

1. La somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1 : $P_A(\overline{D}) = 1 - 0,6 = 0,4$ et $P_B(D) = 1 - 0,8 = 0,2$.



2. $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$.

La probabilité que le joueur pioche dans l'urne A et tire un jeton doré est égale à 0,3.

3. A et B forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D)$$

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D)$$

$$P(D) = 0,5 \times 0,6 + 0,5 \times 0,2 = 0,3 + 0,1 = 0,4.$$

4. On cherche $P_D(B)$. On a $P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D) = 0,5 \times 0,2 = 0,1$, donc

$$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25.$$

Sachant que le jeton obtenu est doré, la probabilité qu'il ait été pioché dans l'urne B est égale à 0,25.

Exercice 2 (5 points)

Pour $t \in [0 ; 13]$, $f(t) = (t^2 + t + 1) e^{-t}$ où t est le nombre d'heures écoulées depuis l'injection et $f(t)$ la concentration du médicament dans le sang, en g/L.

1. $f(0) = (0^2 + 0 + 1) e^0 = 1 \times 1 = 1$.

Au moment de l'injection, la concentration du médicament dans le sang est de 1 g/L.

2. a. f est un produit uv avec $u(t) = t^2 + t + 1$, $u'(t) = 2t + 1$ et $v(t) = e^{-t}$, $v'(t) = -e^{-t}$. Pour tout t de $[0 ; 13]$:

$$f'(t) = (2t + 1) e^{-t} + (t^2 + t + 1) \times (-e^{-t}) = e^{-t} [(2t + 1) - (t^2 + t + 1)] = e^{-t} (-t^2 + t)$$

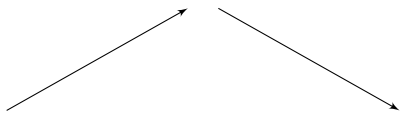
$$\text{donc } f'(t) = t(-t + 1) e^{-t}.$$

b. Le facteur t s'annule en 0 ;

$$-t + 1 \geq 0 \iff t \leq 1.$$

t	0	1	13
t	0	+	+
$-t + 1$		+	0
$t(-t + 1)$	0	+	0

c. Pour tout réel t , $e^{-t} > 0$: le signe de $f'(t)$ est celui de $t(-t + 1)$.

t	0	1	13
$f'(t)$	0	+	0
f			

Il n'est pas demandé de calculer les images.

3. Le médicament reste actif tant que $f(t) \geq 0,1$. Comme f est décroissante sur $[1 ; 13]$:

t	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(t)$	0,647	0,385	0,209	0,107	0,052	0,025	0,011	0,005	0,002	0,001	0

$$f(6) \approx 0,107 \geq 0,1 \text{ et } f(7) \approx 0,052 < 0,1.$$

Le nombre maximal d'heures pendant lequel le médicament reste actif est $t_0 = 6$. La nouvelle injection doit être pratiquée au bout de 6 heures.

Exercice 3 (5 points)

Chaque année, 80 % des donateurs de l'année précédente renouvellent leur don et 300 nouveaux donateurs s'ajoutent. u_n désigne le nombre de donateurs de l'année 2025 + n , avec $u_0 = 1\,000$.

Partie A

1. a. $u_1 = 1\,000 \times 0,8 + 300 = 800 + 300 = 1\,100$.

En 2026, l'association comptera 1 100 donateurs.

- b. D'une année à la suivante, on conserve 80 % des donateurs (on multiplie donc par 0,8) et on ajoute les 300 nouveaux donateurs. Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,8u_n + 300$.

2. u_5 concerne l'année 2025 + 5 = 2030 : d'après ce modèle, l'association comptera environ 1 336 donateurs en 2030.

3.

```

u = 1000
i = 0
while u <= 1400 :
    u = 0.8 * u + 300
    i = i + 1
  
```

La boucle s'arrête dès que $u_i > 1\,400$: on a $u_7 \approx 1\,395 \leq 1\,400$ et $u_8 \approx 1\,416 > 1\,400$.

$i = 8$ signifie que c'est en 2025 + 8 = 2033 que le nombre de donateurs dépassera pour la première fois 1 400.

Partie B

Pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 1\,500$.

1. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1\,500 = 0,8u_n + 300 - 1\,500 = 0,8u_n - 1\,200 = 0,8u_n - 0,8 \times 1\,500 = 0,8(u_n - 1\,500) = 0,8v_n.$$

$$v_0 = u_0 - 1\,500 = 1\,000 - 1\,500 = -500.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = -500$.

2. a. Pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times q^n = -500 \times 0,8^n$.

- b. $u_n = v_n + 1\,500$ donc, pour tout entier naturel n : $u_n = 1\,500 - 500 \times 0,8^n$.