

∞ Évaluation TeSciA session 15 mars 2025 ∞

Mathématiques Générales Épreuve 1

Durée : 1h 30 min

FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

- Les questions à *choix multiples* sont numérotées M1, M2 etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse \square .

Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse.

Toute réponse fausse retire des points aux candidats.

Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).

- Les questions à *réponse brute* sont numérotées L1, L2 etc.

Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse Δ . Tout débordement de cadre est interdit.

- Les questions à *réponse rédigée* sont numérotées RI, R2, etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse \bigcirc ou la feuille-réponse Δ , selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

CONSEILS DE BON SENS

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.

- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.

- Ne répondez jamais au hasard à une question à choix multiples!

- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Calculs de limites

Dans cet exercice, on considère les fonctions

$$f : x \mapsto 3x^2 - 5x + 2 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{1}{x}$$

M1 Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $f(x)$ tend vers :

- A** $+\infty$ **B** $-\infty$ **C** 0 **D** aucune limite **E** un nombre réel non nul

M2 Quand x tend vers $-\infty$, la quantité $f(x)$ tend vers :

- A** $+\infty$ **B** $-\infty$ **C** 0 **D** aucune limite **E** un nombre réel non nul

M3 Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $g(x)$ tend vers :

- A** $+\infty$ **B** $-\infty$ **C** 0 **D** aucune limite **E** un nombre réel non nul

M4 Quand x tend vers 0 avec $x < 0$, la quantité $g(x)$ tend vers :

- A** $+\infty$ **B** $-\infty$ **C** 0 **D** aucune limite **E** un nombre réel non nul

M5 Quand x tend vers 0 , la quantité $f(g(x))$ tend vers :

- A** $+\infty$ **B** $-\infty$ **C** 0 **D** aucune limite **E** un nombre réel non nul

M6 Quand x tend vers 0 , la quantité $g(f(x))$ tend vers :

- A** $+\infty$ **B** $-\infty$ **C** 0 **D** aucune limite **E** un nombre réel non nul

M7 Quand x tend vers $-\infty$, la quantité $g(f(x))$ tend vers :

- A** $+\infty$ **B** $-\infty$ **C** 0 **D** aucune limite **E** un nombre réel non nul

M8 Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $f(g(x))$ tend vers :

- A** $+\infty$ **B** $-\infty$ **C** 0 **D** aucune limite **E** un nombre réel non nul

M9 Quand x tend vers 1 , la quantité $\frac{f(x)}{x-1}$ tend vers :

- A** $+\infty$ **B** 0 **C** 1 **D** aucune limite **E** une autre valeur que 0 , 1 et $+\infty$

M10 Quand x tend vers 1 , la quantité $\frac{f(x)-4}{x-2}$ tend vers :

- A** 0 **B** 2 **C** 7 **D** aucune limite **E** une autre valeur que 0 , 2 et 7

L1 Donner la limite de $\frac{f(x)-4}{2g(x)-1}$ lorsque x tend vers 2 .

Exercice 2. Géométrie plane

On considère un triangle ABC rectangle en C tel que l'angle \widehat{BAC} mesure $\frac{\pi}{3}$. On dispose sur le côté $[A, B]$ d'un point D tel que $AD = 1$ dont le projeté orthogonal E sur (AC) vérifie $EC = 1$ et est sur le segment $[A, C]$.

M11 La distance AE vaut :

- A** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B** 1 **C** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D** $\frac{1}{2}$ **E** aucune des autres réponses proposées

- M12** La distance DE vaut :
- A $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B 1 C $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D $\frac{1}{2}$ E aucune des autres réponses proposées
- M13** La mesure de l'angle \widehat{ABC} est :
- A $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ B $\frac{\pi}{6}$ C $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ D $\frac{\pi}{4}$ E aucune des autres réponses proposées
- M14** La distance DB vaut :
- A $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B 1 C $\frac{1}{2}$ D 2 E aucune des autres réponses proposées
- M15** La distance BC vaut :
- A $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B 1 C $\frac{1}{2}$ D $2\sqrt{3}$ E aucune des autres réponses proposées
- M16** La distance DC vaut :
- A $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C 1 D $\sqrt{3}$ E aucune des autres réponses proposées
- M17** La valeur de $\cos(\widehat{DCE})$ est :
- A $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C $\frac{1}{6}$ D $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ E aucune des autres réponses proposées
- M18** Quelle valeur proposée est la plus proche de $\sin(\widehat{DCE})$?
- A 0,3 B 0,4 C 0,5 D 0,7 E 0,9
- R1** Justifier votre réponse à la question **M18**.
- M19** Quel intervalle contient la mesure de l'angle \widehat{BDC} ?
- A $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ B $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{8}\right]$ C $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ D $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$ E aucune des intervalles proposés

Exercice 3. Logarithmes et exponentielles

Calculs divers

- M20** la quantité $\ln(16)$ est aussi égale à :
- A $(\ln(4))^2$ B $2\ln(8)$ C $3\ln(2)$ D $4\ln(2)$ E $(\ln(2))^4$
- M21** la quantité $\ln(\sqrt{e}) + \ln\left(\frac{1}{e}\right)$ est aussi égale à :
- A $\frac{1}{2}$ B $-\frac{1}{2}$ C -1 D 0 E $\sqrt{\ln(e)} + \frac{1}{\ln(e)}$
- M22** La quantité $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ est aussi égale à :
- A 0 B $\frac{5}{2}$ C 5 D 1 E aucune des autres réponses proposées

Équations et inéquations

- M23** L'équation $x^2 + 4x + 3 = x + 7$ possède :
- A 0 solution B une seule solution C deux solutions D plus de deux solutions

M24 L'équation $\ln(x^2 + 4x + 3) = \ln(x + 7)$ possède :

- A 0 solution B une seule solution C deux solutions D plus de deux solutions

M25 L'équation $\ln(x + 1) + \ln(x + 3) = \ln(x + 7)$ possède :

- A 0 solution B une seule solution C deux solutions D plus de deux solutions

M26 L'équation $e^{x^2} = \frac{1}{9}$ possède :

- A 0 solution B une seule solution C deux solutions D plus de deux solutions

M27 L'équation $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0$ possède :

- A 0 solution B une seule solution C deux solutions D plus de deux solutions

L2 Donner les solutions de l'équation $e^x + e^{1-x} - e - 1 = 0$.

M28 L'inéquation $x \ln(\sqrt{x}) > \sqrt{x} \ln(x)$ a pour ensemble de solutions :

- A $]0; 1[\cup \left] \frac{9}{2}; +\infty[$ B $]0; 1[\cup]4; +\infty[$ C $]1; 2[\cup]4; +\infty[$ D $]4; +\infty[$ E $]0; \frac{1}{2}[\cup]4; +\infty[$

Calculs de fonctions dérivées

M29 La fonction $x \mapsto \ln(5x - 1)$ est :

- A dérivable sur $\left] \frac{1}{5}; +\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \frac{5}{5x-1}$
- B dérivable sur $] -\infty; \frac{1}{5}[\cup \left] \frac{1}{5}; +\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \frac{5}{5x-1} \ln(5x-1)$
- C dérivable sur $] -\infty; \frac{1}{5}[\cup \left] \frac{1}{5}; +\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \frac{5}{5x-1}$
- D dérivable sur $\left] \frac{1}{5}; +\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \frac{5}{5x-1} \ln(5x-1)$
- E aucune des autres réponses proposées n'est vraie

M30 La fonction $x \mapsto \ln(|7 - 2x|)$ est :

- A dérivable sur $\left] \frac{7}{2}; +\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \frac{2}{2x-7}$
- B dérivable sur $] -\infty; \frac{7}{2}[\cup \left] \frac{7}{2}; +\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \frac{2}{2x-7}$
- C dérivable sur $] -\infty; \frac{7}{2}[\cup \left] \frac{7}{2}; +\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \frac{2}{|7-2x|}$
- D dérivable sur $] -\infty; \frac{7}{2}[\cup \left] \frac{7}{2}; +\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \frac{2}{7-2x}$
- E dérivable sur $\left] \frac{7}{2}; +\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \frac{2}{2x-7} \ln(|2x-7|)$

M31 La fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est :

A dérivable sur $]1; +\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

B dérivable sur $]0; +\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$

C dérivable sur $]0; +\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

D dérivable sur $]1; +\infty[$ uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

E aucune des autres réponses proposées n'est vraie

M32 La fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ est :

A dérivable sur \mathbb{R}^* uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}$

B dérivable sur \mathbb{R}^* uniquement et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

C dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}$

D dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

E aucune des autres réponses proposées

Une fonction étonnante

On considère la fonction f qui à tout réel x dans $] -1; 1[$ associe le réel $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)$.

Δ **L3** Donner la dérivée de f .

M33 Parmi f et sa dérivée f' , lesquelles tendent vers 0 en 1?

A f

B f et f'

C f'

D Aucunes d'entre elles

Exercice 4. L'équation $a^x = x^a$

Lorsqu'on dispose de réels x et y tels que $x > 0$, on définit

$$x^y = \exp(y \ln(x))$$

, ce qui prolonge les définitions connues lorsque y est entier.

On fixe a dans \mathbb{R}_+^* . On se propose d'étudier, selon les valeurs de a , le nombre de solutions de l'équation

$$(E_a) \quad a^x = x^a$$

où l'inconnue x est dans \mathbb{R}_+^* .

On définit, pour tout a dans \mathbb{R}_+^* , la fonction h_a sur \mathbb{R}_+^* par :

$$h_a(x) = x \ln(a) - a \ln(x)$$

Étude du cas où $a = e$

M34 La fonction h_a est :

A strictement croissante sur $]0 ; e[$ et strictement décroissante sur $[e ; +\infty[$

B strictement décroissante sur $]0 ; e[$ et strictement croissante sur $[e ; +\infty[$

C strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*

D strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^*

E aucune des autres réponses

M35 L'équation (E_e) possède :

A aucune solution

B une unique solution

C exactement deux solutions

D une infinité de solutions

E plus de deux solutions, mais en nombre fini

R2 Montrer que $\frac{x}{\ln(x)} \geq e$ pour tout réel $x > 1$.

Étude du cas où $a = 2$

M36 La fonction h_2 est :

A strictement décroissante sur $]0 ; \frac{2}{\ln(2)}]$ et strictement croissante sur $[\frac{2}{\ln(2)} ; +\infty[$

B strictement croissante sur $]0 ; \frac{2}{\ln(2)}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{2}{\ln(2)} ; +\infty[$

C strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*

D strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^*

E Aucune des autres réponses proposées

L4 Donner l'ensemble des solutions de (E_2) .

Étude du cas où $0 < a < 1$

M37 La fonction h_a est :

A strictement décroissante sur $]0 ; -\frac{a}{\ln(a)}]$ et strictement croissante sur $[-\frac{a}{\ln(a)} ; +\infty[$

B strictement croissante sur $]0 ; -\frac{a}{\ln(a)}]$ et strictement décroissante sur $[-\frac{a}{\ln(a)} ; +\infty[$

C strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*

D strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^*

E aucune des autres réponses proposées

△ L5 Donner l'ensemble des solutions de (E_a) .

Étude du cas où $1 < a$ et $a \neq e$

□ M38 La fonction h_a est :

A présente un maximum strictement positif

B présente un maximum strictement négatif

C présente un minimum strictement positif

D présente un minimum strictement négatif

E ne présente ni maximum ni minimum

□ M39 L'équation (E_a) a exactement une solution b différente de a , et :

A $b < 1$

B $a < b$

C $1 < b < a$ si $a > e$, tandis que $a < b$ si $a < e$

E aucune des autres affirmations n'est vraie en toute généralité

D $1 < b < a$ si $a < e$, tandis que $a < b$ si $a > e$

Exercice 5. Histoire d'urnes

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

Première situation

Une urne contient $n + 1$ boules blanches et $n - 1$ boules noires. Le jeu consiste à tirer une boule aléatoirement dans l'urne : chaque boule est tirée de manière équiprobable. Si la boule tirée est blanche, le joueur gagne, sinon il perd. On rappelle que $n > 1$.

□ M40 On note p la probabilité de gagner, et q celle de perdre. Alors :

A $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ et $q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$

B $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$ et $q = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$

C $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{2}$

D $p = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$ et $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$

E $p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ et $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$

□ M41 Le joueur reçoit 2 euros quand il gagne, et donne 3 euros quand il perd.

On note X la variable aléatoire donnant le résultat de la partie, en nombre d'euros pour le joueur.

Quelle que soit la valeur de n , l'espérance de X vaut :

A $\frac{n-1}{2n}$

B $\frac{n-5}{2n}$

C $\frac{1-n}{2n} + \frac{1}{4n}$

D $\frac{5-n}{2n}$

E aucune des autres réponses

On adopte de nouvelles règles. Le joueur tire d'abord une boule dans l'urne ; ensuite, s'il a tiré une boule noire il met une boule blanche sans y remettre la boule tirée précédemment, alors que s'il a tiré une boule blanche il met dans l'urne une boule noire sans y remettre la boule tirée précédemment. Il procède ensuite à un deuxième tirage dans l'urne : si lors de ce deuxième tirage la boule tirée est blanche, il gagne, sinon il perd.

□ M42 On note p' la probabilité que le joueur gagne avec les nouvelles règles (alors que p désigne toujours la probabilité considérée dans la question M40). Alors :

A $p' < p$ quelle que soit la valeur de n

B $p' > p$ quelle que soit la valeur de n

C $p' \leq p$ quelle que soit la valeur de n et il est possible que $p' = p$

D $p' \geq p$ quelle que soit la valeur de n et il est possible que $p' = p$

E aucune des autres réponses n'est vraie

Deuxième situation

L'urne contient désormais $n+1$ boules blanches, $n-1$ boules noires et deux boules orange, et on rappelle que $n > 1$. Le jeu consiste à tirer une boule aléatoirement dans l'urne : chaque boule est tirée de manière équiprobable. Si la boule tirée est blanche le joueur gagne, si elle est noire il perd, si elle est orange il procède à un nouveau tirage sans remettre la boule orange dans l'urne, et ce jusqu'à avoir tiré une boule blanche ou une boule noire. Le jeu se termine en trois tirages au plus. Le joueur reçoit 2 euros quand il gagne, et donne 3 euros quand il perd.

On note X la variable aléatoire donnant le résultat de la partie, en nombre d'euros pour le joueur. On note D la variable aléatoire donnant le nombre total de boules tirées avant de gagner ou de perdre. Par exemple, la variable D prend la valeur 2 quand le joueur prend une boule orange au premier tirage, puis une boule blanche ou noire au deuxième.

M43 On note p'' la probabilité de gagner et q'' celle de perdre. Alors :

A $p'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ et $q'' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ B $p'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$ et $q'' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$ C $p'' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ et $q'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$

D $p'' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$ et $q'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$ E $p'' = \frac{1}{2}$ et $q'' = \frac{1}{2}$

M44 Vrai ou Faux? Quels que soient les entiers k et ℓ , les événements $[X = k]$ et $[D = \ell]$ sont indépendants

A Vrai

B Faux

M45 L'espérance de la variable aléatoire D est égale à :

A $\frac{2n+3}{2n+1}$

B $\frac{4n^2+6n+6}{4n^2+6n+2}$

C $\frac{n^2+2n+3}{n^2+3n+2}$

D 2

E aucune des autres réponses, en toute généralité

Troisième situation

On suppose ici que $n \geq 3$.

L'urne contient désormais n boules, dont deux sont blanches et toutes les autres noires. On vide l'urne en tirant les n boules successivement sans les remettre dans l'urne : chaque boule est tirée de manière équiprobable.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le rang du tirage de la première boule blanche trouvée. Par exemple, si on tire, dans l'ordre, 3 boules noires, 1 boule blanche, 2 boules noires, 1 boule blanche puis les boules noires restantes, alors X vaut 4.

On admet la formule : $1 + 2^2 + \dots + k^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

M46 Pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, la probabilité $P(X = k)$ vaut :

A $\frac{2(n-k)}{n(n-1)}$

B $\frac{2k}{n(n-2)}$

C $\frac{2k}{n!}$

D $\frac{2k}{n(n-1)}$

E $\frac{2(n-k)}{n!}$

R3 Justifier votre réponse à la question M46.

△ **L6** On désigne par Y la variable aléatoire donnant le rang de tirage de la deuxième boule blanche. Donner une relation entre l'espérance de Y et celle de X (qu'on ne demande pas de calculer).

□ **M47** L'espérance de X est égale à :

A $\frac{2(n-1)}{3}$

B $\frac{2(n+1)}{3}$

C $\frac{2n+1}{3}$

D $\frac{n+1}{3}$

E Aucune des autres réponses proposées, en toute généralité

Exercice 6. Une suite récurrente

Dans tout l'exercice, on considère la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = x + \sin(x)$.

On se donne une suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On dit que u est **stationnaire** lorsqu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $u_n = u_{n_0}$.

On dit qu'un intervalle I de \mathbb{R} est **stable par f** lorsque, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in I$.

□ **M48** La fonction f est :

 A strictement croissante

 B strictement décroissante

 C ni croissante, ni décroissante

 D décroissante, mais pas strictement décroissante

 E croissante, mais pas strictement croissante

□ **M49** Vrai ou Faux? L'intervalle $[0; \pi]$ est stable par f .

 A Vrai

 B Faux

□ **M50** Vrai ou Faux? L'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ est stable par f .

 A Vrai

 B Faux

□ **M51** Vrai ou Faux? L'intervalle $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ est stable par f .

 A Vrai

 B Faux

□ **M52** L'intervalle $[k\pi; (k+1)\pi]$ avec k dans \mathbb{Z} :

 A ne vérifie aucune des autres propriétés proposées

 B n'est stable par f pour aucune valeur de k
 C est stable par f si et seulement si k est pair

 D est stable par f si et seulement si k est impair

 E est stable par f quelle que soit la valeur de k

□ **M53** L'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ avec k dans \mathbb{Z} :

 A ne vérifie aucune des autres propriétés proposées

 B n'est stable par f pour aucune valeur de k
 C est stable par f si et seulement si k est pair

 D est stable par f si et seulement si k est impair

 E est stable par f quelle que soit la valeur de k

M54 Vrai ou Faux? Si $u_0 \in [0 ; \pi]$, on peut affirmer que $u_0 \leq u_n \leq \pi$ quel que soit n dans \mathbb{N} .

A Vrai

B Faux

M55 Si $u_0 \in]0 ; \pi]$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

A est décroissante

B est croissante

C est croissante pour un nombre fini non nul de valeurs possibles u_0 , et seulement pour ces valeurs

D est décroissante pour un nombre fini non nul de valeurs possibles u_0 , et seulement pour ces valeurs

E n'est ni croissante ni décroissante

M56 Si $u_0 \in]0 ; \pi]$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

A tend vers $+\infty$

B converge vers 0

C converge vers π

D n'a aucune limite, finie ou non

E converge vers $\ell \in]0 ; \pi[$

R4 Justifier le résultat de la question **M56**.

M57 Si $u_0 \in]\pi ; 2\pi]$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

A est décroissante

B est croissante

C est croissante pour un nombre fini non nul de valeurs possibles u_0 , et seulement pour ces valeurs

D est décroissante pour un nombre fini non nul de valeurs possibles u_0 , et seulement pour ces valeurs

E n'est ni croissante ni décroissante

M58 Si $u_0 \in [\pi ; 2\pi[$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

A tend vers $+\infty$

B converge vers π

C converge vers 2π

D n'a aucune limite, finie ou non

E converge vers $\ell \in]0 ; \pi[$

M59 On note k l'unique entier tel que $k\pi \leq u_0 < (k+1)\pi$. Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

A converge vers $k\pi$ si et seulement si k est impair ou $u_0 = k\pi$

B converge vers $k\pi$ si et seulement si k est pair ou $u_0 = k\pi$

C ne converge jamais

D converge vers $k\pi$

E ne vérifie aucune des autres propriétés proposées

L7 On note $u_0 = x$ et, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente on note $\ell(x)$ sa limite. Préciser la valeurs de $\ell(x)$ en fonction de x (lorsque cette limite existe).

M60 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

A est stationnaire pour un nombre fini non nul de valeurs possibles de u_0

B est stationnaire si et seulement si u_0 est de la forme $k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$

C n'est jamais stationnaire

D ne vérifie aucune des autres propriétés

E est stationnaire si et seulement si u_0 est de la forme $2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$

Suites vérifiant une inégalité

Dans cette partie de l'exercice, on dit qu'une suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété \mathcal{P} $v_{n+1} \geq f(v_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Δ **R5** Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la propriété \mathcal{P} et telle que $v_0 = u_0$. Démontrer que $v_n \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

M61 Laquelle des propriétés suivantes est vraie ?

A aucune suite vérifiant \mathcal{P} n'est croissante **B** toutes les suites vérifiant \mathcal{P} sont croissantes

C certaines suites vérifiant \mathcal{P} sont croissantes, mais pas toutes

M62 Laquelle des propriétés suivantes est vraie ?

A toute suite vérifiant \mathcal{P} est minorée et majorée **B** au moins une suite vérifiant \mathcal{P} n'est ni minorée ni majorée

C toute suite vérifiant \mathcal{P} est majorée, mais certaines ne sont pas minorées **D** toute suite vérifiant \mathcal{P} est minorée, mais certaines ne sont pas majorée

M63 Laquelle des propriétés suivantes est vraie ?

A toute suite vérifiant \mathcal{P} converge ou tend vers $+\infty$, et au moins une ne converge pas

B il existe au moins une suite vérifiant \mathcal{P} et qui tend vers $-\infty$

C il existe au moins une suite vérifiant \mathcal{P} et qui ne possède aucune limite, finie ou non

D toute suite vérifiant \mathcal{P} converge

E aucune des autres propriétés indiquées n'est vraie

M64 Une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété \mathcal{P} et pour tout entier $n \geq 0$, l'inégalité $0 < v_n \leq \pi$. Alors :

A elle tend vers $+\infty$ **B** elle converge mais pas vers π

C elle converge vers π **D** on ne peut pas conclure

M65 Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété \mathcal{P} et pour tout entier $n \geq 0$, l'inégalité $\pi \leq v_n < 2\pi$. Alors :

A on peut affirmer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers π **B** on peut affirmer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$

C on peut affirmer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge mais pas nécessairement vers π **D** on ne peut soutenir l'une des autres affirmations proposées

M66 Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vérifiant la propriété \mathcal{P} . On note ℓ sa limite. Alors :

A on peut affirmer que $\ell = k\pi$ pour un entier relatif impair k **B** on peut affirmer que $\ell = k\pi$ pour un entier relatif pair k

C on peut affirmer que $\ell = k\pi$ pour un entier relatif k , mais on ne peut pas statuer en général sur la parité de l'entier k **D** le nombre ℓ n'est pas nécessairement de la forme $k\pi$ pour un entier k

Exercice 7. Sommes alternées de parties entières

Pour un réel x on note $E(x)$ l'unique entier k qui vérifie $k \leq x < k + 1$. Par exemple, $E(7,2) = 7$ et $E(-1,3) = -2$. On note $S_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on note la somme S_n définie par :

$$S_n = -1 + E(\sqrt{2}) - E(\sqrt{3}) + \dots + (-1)^k E(\sqrt{k}) + \dots + (-1)^n E(\sqrt{n})$$

M67 Soit m un entier naturel. L'égalité $E(\sqrt{k}) = m$ est réalisé si et seulement si k est un entier tel que :

A $m \leq k < m + 1$

B $k \leq m < k + 1$

C $k \leq \sqrt{k} < k + 1$

D $m^2 \leq k < (m + 1)^2$

 E aucune des autres réponses proposées

M68 Lorsque l'entier k varie dans \mathbb{N}^* , le réel $E(\sqrt{2k}) - E(\sqrt{2k-1})$ est nul sauf lorsque :

A $2k$ est le carré d'un entier

B k est le carré d'un entier

C $2k + 1$ est le carré d'un entier

D $2k - 1$ est le carré d'un entier

 E aucune des autres réponses proposées

M69 La valeur de S_6 est :

A -2

B -1

C 0

D 1

E 2

M70 La valeur de S_{15} est :

A -2

B -1

C 0

D 1

E 2

L8 Donner la valeur S_{20} .

M71 Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

 A la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

 B $S_{2n} \geq 0$ pour tout entier $n \geq 0$
 C $|S_n| = 1 + E(\sqrt{2}) + E(\sqrt{3}) + \dots + E(\sqrt{k}) + \dots + E(\sqrt{n})$ pour tout entier $n \geq 0$
 D $S_{2n} = 1 + E(\sqrt{2}) + E(\sqrt{4}) + \dots + E(\sqrt{2k}) + \dots + E(\sqrt{2n})$ pour tout entier $n \geq 0$
 E aucune des autres réponses indiquées n'est vraie

M72 La suite $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$:

 A n'a pas de limite, finie ou non

 B tend vers $+\infty$
 C n'est ni croissante ni décroissante

 D converge

 E ne vérifie aucune des autres propriétés proposées

L9 Soit m un entier naturel. On note A_m la somme des termes $(-1)^k E(\sqrt{k})$ tels que $E(\sqrt{k}) = m$. Exprimer A_m en fonction de m .

M73 Pour tout entier naturel n , la somme S_{n^2-1} est égale à :

A $(-1)^n E\left(\frac{n-1}{2}\right)$

B $(-1)^n E\left(\frac{n}{2}\right)$

C $(-1)^{n-1} E\left(\frac{n}{2}\right)$

D $(-1)^{n-1} E\left(\frac{n}{2}\right)$

 E aucune des autres réponses proposées, en général

□ **M74** Soit N un entier naturel, et n l'unique entier tel que $n^2 \leq N < (n+1)^2$. Alors $S_N - S_{n^2-1}$ est égal à :

A $(-1)^n n$ si $N - n^2$ est le carré d'un entier, et 0 sinon

B 0 si $N - n^2$ est pair, et $(-1)^n n$ sinon

C 0 si $N - n^2$ est impair, et $(-1)^n n$ sinon

D 0 si $N - n^2$ est le carré d'un entier, et $(-1)^n n$ sinon

E aucune des autres réponses proposées en général

△ **R6** Justifier que $|S_n|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

□ **M75** Pour un entier relatif a , on note $N(a)$ le nombre d'entiers n tels que $S_n = a$. on note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs, et $2\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels pairs non nuls. Quelle affirmation est vraie?

A La fonction $a \mapsto N(a)$ a pour ensemble de valeurs $2\mathbb{N}$ et prend chacune de ces valeurs exactement une fois

B La fonction $a \mapsto N(a)$ a pour ensemble de valeurs $2\mathbb{N}^*$ et au moins une de ces valeurs est prise plusieurs fois

C La fonction $a \mapsto N(a)$ a pour ensemble de valeurs $2\mathbb{N}^*$ et prend chacune de ces valeurs exactement une fois

D La fonction $a \mapsto N(a)$ a pour ensemble de valeurs \mathbb{N}^* et au moins une de ces valeurs est prise plusieurs fois

E La fonction $a \mapsto N(a)$ a pour ensemble de valeurs \mathbb{N}^* et prend chacune de ces valeurs exactement une fois
