∾ Évaluation ESciA session 16 mars 2024 ∾

Mathématiques générales avancées Épreuve 1

Durée : 1h 30 min

FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

• Les questions à *choix multiples* sont numérotées M1, M2, etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □.
Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse.
Toute réponse fausse retire des points aux candidats.
Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).

• Les questions *à réponse brute* sont numérotées L1, L2, etc.
Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.

• Les questions *à réponse rédigée* sont numérotées R1, R2, etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

CONSEILS DE BON SENS

• L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
• Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
• Ne répondez jamais au hasard à une question à choix multiples !
• Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Une fonction rationnelle

On considère dans cet exercice la fonction f qui à tout réel x différent de 0 et -1 associe le réel

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}.$$

☐ **M1** Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $f(x)$ tend :

[A] vers aucune limite [B] vers $+\infty$ [C] vers 2 [D] vers 0 [E] vers 1

☐ **M2** Quand x tend vers 0^+, la quantité $f(x)$ tend :

[A] vers $-\infty$ [B] vers 1 [C] vers $+\infty$ [D] vers aucune limite [E] vers 0

☐ **M3** Quand x tend vers 0^-, la quantité $f(x)$ tend :

[A] vers 1 [B] vers aucune limite [C] vers $+\infty$ [D] vers $-\infty$ [E] vers 0

☐ **M4** La dérivée de f est la fonction qui à x associe :

[A] $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$
[B] $-\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$
[C] $-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$
[D] aucune des autres valeurs indiquées en général
[E] $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$

☐ **M5** Sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$, la fonction f :

[A] est strictement décroissante
[B] est constante de valeur 1
[C] est strictement croissante
[D] n'est ni croissante ni décroissante

R1 Dresser sans justification le tableau de variation de f sur son domaine de définition.
On indiquera en particulier les limites aux bornes des trois intervalles formant le domaine de définition de f.

☐ **M6** On donne un réel y. L'équation $f(x) = y$ admet alors :

[A] systématiquement une solution
[B] une, deux ou trois solutions, selon la valeur de y
[C] une ou deux solutions, selon la valeur de y
[D] exactement deux solutions
[E] un nombre fini de solutions, mais peut n'en admettre aucune selon la valeur de y

L1 Préciser la ou les valeurs du réel y pour lesquelles $f(x) = y$ admet une unique solution.

☐ **M7** Soit a et b deux réels. Lorsque l'équation $x^2 + ax + b = 0$ possède exactement deux solutions, la somme de ces solutions est :

[A] $\frac{a}{2}$ [B] $-2a$ [C] $-\frac{a}{2}$ [D] $2a$ [E] aucune des autres réponses en général

L2 On fixe ici un réel y pour lequel l'équation $f(x) = y$ admet exactement deux solutions, notées x_1 et x_2.
Donner en fonction de y la valeur de la somme $x_1 + x_2$.

Exercice 2. Une famille de droites

On se place dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan euclidien. Soit m un nombre réel. On note C_m l'ensemble de points du plan défini dans ce repère par l'équation

$$\left(m^2-1\right)x+\left(m^2+m-2\right)y-3m+4=m,$$

et on note Δ_m l'ensemble de points du plan défini dans ce repère par l'équation

$$(m+1)x+(m+2)y-4=0.$$

☐ **M8** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

A Δ_m est une droite pour certaines valeurs de m, mais pas pour d'autres
B Δ_m est une droite quelle que soit la valeur de m
C Δ_m n'est une droite pour aucune valeur possible de m

☐ **M9** L'ensemble Δ_m est une droite parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si

A $m=2$ B $m=3$ C $m=-1$ D $m=-2$ E $m=0$

☐ **M10** Δ_m est une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses si et seulement si :

A $m=-2$ B $m=0$ C $m=2$ D $m=3$ E $m=-1$

☐ **M11** L'ensemble C_1 est :

A le plan tout entier
B l'ensemble vide
C constitué d'un seul point
D constitué de deux points
E constitué de trois points

☐ **M12** L'ensemble C_m est :

A une droite ou le plan tout entier, selon la valeur de m
B aucune des autres réponses proposées
C une droite, quelle que soit la valeur de m
D une droite ou l'ensemble vide, selon la valeur de m
E un ensemble fini quelle que soit la valeur de m

☐ **M13** On donne un autre réel p, et on suppose que Δ_m et Δ_p sont des droites. Pour que Δ_m et Δ_p soient perpendiculaires, il faut et il suffit que :

A $(m+1)(p+2)-(m+2)(p+1)=1$
B aucune des autres réponses proposées
C $(m+1)(p+1)-(m+2)(p+2)=0$
D $(m+1)(p+2)-(m+2)(p+1)=0$
E $(m+1)(p+1)+(m+2)(p+2)=0$

L3 Donner les coordonnées d'un point du plan par lequel passent une infinité de droites Δ_m.

L4 Donner l'équation d'une droite qui n'est parallèle à aucune des droites Δ_m .

Exercice 3. Calculs, Fractions

☐ **M14** La puissance quatrième de $\sqrt{1+\sqrt{1+1}}$ est :

$\boxed{\text{A}}$ $2+\sqrt{2}$ $\boxed{\text{B}}$ 5 $\boxed{\text{C}}$ $2+2\sqrt{2}$ $\boxed{\text{D}}$ $3+2\sqrt{2}$ $\boxed{\text{E}}$ 3

☐ **M15** Lorsque x est un réel non nul, la fraction $\dfrac{\frac{1}{x}-x}{x+\frac{1}{x}}$ est systématiquement égale à :

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{x-1}{x+1}$ $\boxed{\text{B}}$ aucune des autres propositions $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{x^2}-x^2$ $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1-x^2}{x^2+1}$ $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1-x}{x+1}$

☐ **M16** Étant donné un nombre entier p, on considère les nombres $x=1+2^p$ et $y=1+2^{-p}$. Alors y vaut :

$\boxed{\text{A}}$ aucune des autres propositions $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{x-1}{x}$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{x+1}{x}$ $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{x}{x-1}$ $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{x}{x+1}$

☐ **M17** Pour tout choix du nombre réel x différent de 1 et -1, la quantité $\dfrac{x^2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}$ est égale à :

$\boxed{\text{A}}$ aucune des autres réponses proposées

$\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x-1)}$

$\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{x^2-x-1}{(x+1)^2}$

$\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)(x-1)}$

$\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{x^2-x-1}{(x+1)^2(x-1)}$

☐ **M18** Soit x un réel strictement positif. La quantité

$$A=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}.$$

est alors égale à :

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{2x+1}{x+1}$

$\boxed{\text{B}}$ aucune des autres réponses proposées

$\boxed{\text{C}}$ x

D $\dfrac{3x+2}{2x+1}$

E $\dfrac{2x+1}{3x+2}$

Dans les questions **M19** et **M20**, on considère la fonction f associant à tout réel x différent de 1, 2 et 3 le réel

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

☐ **M19** On suppose disposer d'un nombre réel a, ou valant $+\infty$, tel que $f(x)$ tende vers 0 quand x tend vers a. Alors :

A $a = 0$

B $a = 2$

C $a = +\infty$

D on ne peut pas donner précisément la valeur de a

E un tel a n'existe pas

☐ **M20** On admet qu'il existe des constantes α, β et γ vérifiant l'égalité

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2} + \frac{\gamma}{x-3}$$

pour tout réel x en lequel f est définie.
La somme $\alpha + \beta + \gamma$ vaut alors :

A 0 | B 6 | C 1 | D -6 | E -1

☐ **M21** Pour tout choix des nombres réels x, y, et z, la valeur de

$$M = x^2y + y^2x + y^2z + xz^2 + yz^2 + zx^2 - (x+y+z)(xy+yz+zx)$$

est :

A aucune des autres réponses proposées | B $3xyz$ | C 0 | D $-xyz$ | E $-3xyz$

☐ **M22** Le nombre d'entiers relatifs x vérifiant $9^{\left(x^2\right)} = 3^{x+1}$ est :

A au moins égal à 4 | B 1 | C 2 | D 0 | E 3

☐ **M23** On dispose de deux entiers relatifs x et y tels que l'on ait les égalités $4^x = 8 \times 2^{x+y}$ et $9^{x+y} = 243 \times 3^{5y}$.
Le produit xy est alors égal à :

A 10 | B 12 | C une autre valeur que celles proposées | D on ne peut pas donner la valeur précise de xy | E 4

Exercice 4. Encadrements

Dans tout cet exercice, on se donne deux réels x et y vérifiant les inégalités

$$-2 \leqslant x \leqslant 5 \quad \text{et} \quad -3 \leqslant y \leqslant 6.$$

☐ **M24** Le meilleur encadrement possible pour $|x| + 2y$ est entre :

A 0 et 8 B -4 et 17 C -6 et 17 D aucune des autres réponses E -8 et 17

☐ **M25** Le meilleur encadrement possible pour $3y - 2x$ est entre :

A -1 et 1 B -13 et 27 C -19 et 22 D -5 et 8 E -18 et 23

☐ **M26** Le meilleur encadrement possible pour $\dfrac{2x+6}{y+8}$ est entre :

A $\dfrac{1}{7}$ et $\dfrac{16}{5}$ B $\dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{12}{7}$ C $\dfrac{2}{5}$ et $\dfrac{8}{7}$ D $\dfrac{2}{13}$ et $\dfrac{16}{7}$ E -2 et 6

△ **L5** Donner le meilleur encadrement possible pour $x^2 + y^2$.
Dans la dernière partie de cet exercice, on s'intéresse au meilleur encadrement possible pour la quantité

$$z = x^2 - 2xy + 3y^2.$$

R2 Démontrer que la plus petite valeur possible pour z est 0.
On suggère pour cela de trouver deux constantes a et b telles que z se réécrive $(x - ay)^2 + by^2$.

☐ **M27** On fixe y dans $[-3\ ;\ 6]$. On considère la fonction g qui à x dans $[-2\ ;\ 5]$ associe

$$g(x) = x^2 - 2xy + 3y^2.$$

La fonction g prend sa valeur maximale :

A en un point de $]-2\ ;\ 5[$, pour au moins une valeur de y
B en $x = -2$, quel que soit le choix de y
C en $x = -2$ ou $x = 5$, selon le choix de y
D $\dfrac{2}{13}$ et $\dfrac{2}{13}$
E en $x = 5$, quel que soit le choix de y

☐ **M28** La valeur maximale prise par z est :

A 82 B aucune des autres valeurs proposées C 19 D 136 E 73

◯ R3 Justifier la réponse à la question **M28**, en considérant comme acquis le résultat de la question **M27** (qu'on ne justifiera donc pas).

Exercice 5. Équations et inégalités

☐ **M29** Les solutions réelles de $x^4 - x^2 - 2 = 0$ sont au nombre de :

A 2 B 3 C 0 D 1 E 4

☐ **M30** Le nombre de solutions de l'équation $\dfrac{1}{x^2} = 5|x|$ d'inconnue réelle x est :

A 2

B 1

C infini

D fini et strictement supérieur à 2

E 0

☐ **M31** L'ensemble des nombres réels $x \geqslant 0$ vérifiant $x^4 - 3x^2 + 1 > -1$ est :

A $[0\,;\,1[\cup\left[\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$

B aucune des autres solutions proposées

C $[0\,;\,2]$

D $]-\infty\,;\,1[\cup]2\,;\,+\infty[$

E $[0\,;\,1[\cup\left]\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$

☐ **M32** On s'intéresse aux constantes C telles que, pour tout élément x de $[-1\,;\,1]$, on ait $x^2\left(1-x^2\right) \leqslant C$.
La plus petite valeur possible pour une telle constante C est :

A $\dfrac{1}{8}$

B $\dfrac{1}{2}$

C $\dfrac{1}{4}$

D 1

E aucune des autres réponses proposées

L6 Donner le domaine de définition D de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln\left(\left|x^2-\frac{1}{4}\right|\right)}{\sqrt{3-x^2}}$.

☐ **M33** Pour un réel a, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = x^2 - 2ax + 3a - 2$.
L'ensemble des réels a pour lesquels f_a s'annule en exactement deux points est :

A $[1\,;\,2]$

B $]1\,;\,2[$

C aucune des autres réponses proposées

D vide

E $]-2\,;\,1[$

☐ **M34** Le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x - 3$ est :

A 3

B 1

C 2

D 0

E 4

R4 Justifier votre réponse à la question **M34**.

Exercice 6. Limites, dérivées

☐ **M35** La limite de $\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-2x}$ quand x tend vers $-\infty$:

A est une limite finie non nulle

B est 0

C n'existe pas

D est $-\infty$

E est $+\infty$

☐ **M36** La limite de $\ln(2x+1) - \ln(5x+2)$ quand x tend vers $+\infty$:

A est $-\infty$

B est une limite finie non nulle

C n'existe pas

D est $+\infty$

E est 0

☐ **M37** Le signe de $x - \ln(1+x)$ quand le nombre réel x varie dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$:

A est négatif B varie selon la valeur de x C est positif

L7 Donner la dérivée de la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

☐ **M38** Quand le nombre réel x varie dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$, le signe de $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$:

A varie selon la valeur de x B est positif C est négatif

☐ **M39** Soit a, b, c, d des nombres réels, avec $c \neq 0$. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ pour tout réel x tel que $cx+d \neq 0$.
La fonction dérivée de f associe alors systématiquement à x le réel :

A $\dfrac{ab+cd}{(cx+d)^2}$ B $\dfrac{ac-bd}{(cx+d)^2}$ C $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ D $\dfrac{ab-cd}{(cx+d)^2}$ E $\dfrac{ad+bc}{(cx+d)^2}$

☐ **M40** La dérivée de la fonction qui à x associe $x^3\mathrm{e}^{-2x}$ est la fonction qui à x associe :

A $\left(3x^2 - 2x^3\right)\mathrm{e}^{2x}$ B $-3x^2\mathrm{e}^{-2x}$ C $-2x^3\mathrm{e}^{-2x}$ D $\left(-3x^2 + 2x^3\right)\mathrm{e}^{-2x}$

☐ **M41** La dérivée de la fonction qui à x associe $\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$ est la fonction qui à x associe :

A $\dfrac{2x^2-6x}{\left(x^2+3\right)^2}$ B $\dfrac{2x^2+6x}{\left(x^2+3\right)^2}$ C $\dfrac{-4x}{\left(x^2+3\right)^2}$ D $\dfrac{2}{\left(x^2+3\right)^2}$ E $\dfrac{4x}{\left(x^2+3\right)^2}$

☐ **M42** La dérivée de la fonction qui à x associe $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}+3}$ est la fonction qui à x associe :

A $\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}+6\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+3\right)^2}$ B $\dfrac{8\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+3\right)^2}$ C $\dfrac{4\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+3\right)^2}$
D $\dfrac{2}{\left(\mathrm{e}^{2x}+3\right)^2}$ E aucune des autres réponses proposées

☐ **M43** La dérivée de la fonction qui à x associe $\left(\mathrm{e}^{-x}+x\right)^3$ est la fonction qui à x associe :

A $\left(\mathrm{e}^{-x}+x\right)^2$ B $3\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{-x}+x\right)^2$ C $3\left(\mathrm{e}^{-x}+x\right)^2$
D $3\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{-x}+x\right)^2$ E aucune des autres réponses proposées

☐ **M44** La limite de $\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1-x}{x}$ quand x tend vers 0 :

A n'existe pas B est $-\infty$ C est une limite finie non nulle D est 0 E est $+\infty$

☐ **M45** La limite de $\dfrac{e^{2x}-1-x}{x}$ quand x tend vers 0 :

[A] est une limite finie non nulle   [B] est $-\infty$ [C] est 0   [D] n'existe pas   [E] est $+\infty$

Exercice 7. Pile ou Face

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois de suite une pièce équilibrée, et l'on note P lorsque la pièce tombe sur Pile, et F lorsqu'elle tombe sur Face.
Le résultat est alors donné par une liste de n lettres P ou F.
Par exemple, si $n = 4$ on note P F P P pour indiquer qu'on a tiré Pile au premier lancer, puis Face au deuxième, puis Pile au troisième et au quatrième lancer.

☐ **M46** La probabilité que la suite des lancers débute par P F vaut :

[A] 1   [B] $\dfrac{1}{2}$ [C] $\dfrac{1}{4}$ [D] aucune des autres réponses proposées   [E] $\dfrac{3}{4}$

☐ **M47** La probabilité que le premier et le dernier lancer donnent le même résultat est :

[A] $\dfrac{1}{4}$ [B] 1   [C] $\dfrac{1}{2}$ [D] aucune des autres réponses proposées   [E] $\dfrac{3}{4}$

☐ **M48** Le nombre total de listes donnant les résultats possibles de l'expérience est :

[A] 2^n [B] 2^{n-1} [C] $\dfrac{n(n+1)}{2}$ [D] $\dfrac{n(n-1)}{2}$ [E] $n!$

☐ **M49** La probabilité d'obtenir au moins deux Pile lors des n lancers est toujours égale à :

[A] $\dfrac{2^n-(n+1)}{2^n}$ [B] $\dfrac{2^n-n}{2^n}$ [C] $\dfrac{n}{2^n}$ [D] $\dfrac{1}{2^n}$ [E] $\dfrac{n+1}{2^n}$

On envisage les deux évènements :
A : « la liste de résultats comporte deux P consécutifs » ;
B : « la liste de résultats comporte deux F consécutifs » ainsi que leurs négations respectives $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
Par exemple, quand la liste des lancers est FPPPF, l'évènement A est réalisé (il y a deux Pile consécutifs, aux deuxième et troisième lancers) mais B n'est pas réalisé car il n'y a pas deux Face consécutifs.

☐ **M50** Les probabilités des évènements A et B :
[A] sont égales quelle que soit la valeur de n
[B] peuvent être égales ou différentes, selon la valeur de n
[C] sont différentes quelle que soit la valeur de n.

☐ **M51** Dans cette question, on suppose $n = 4$. La probabilité de $A \cap B$ vaut alors :

[A] 1   [B] $\dfrac{1}{8}$ [C] $\dfrac{1}{4}$ [D] $\dfrac{1}{16}$ [E] $\dfrac{1}{2}$

☐ **M52** On revient au cas général sur n. La probabilité de $A \cap B$ vaut :

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1}{4}$ $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{n}{2^n}$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{2}$ $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{2^n}$

☐ **M53** On revient au cas $n = 4$.
La probabilité de A vaut alors :

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1}{2}$ $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{3}{8}$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{4}$ $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{3}{4}$ $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{5}{8}$

Dans la suite, on note p_n la probabilité de A. On convient que $p_1 = 0$ et $p_0 = 0$.

☐ **M54** La probabilité de A sachant que le tirage commence par F vaut :

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1}{2}p_{n-2}$ $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{2}p_{n-1}$ $\boxed{\text{C}}$ p_n $\boxed{\text{D}}$ p_{n-1} $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{2}p_n$

☐ **M55** La probabilité de A sachant que le tirage commence par P F vaut :

$\boxed{\text{A}}$ p_{n-1} $\boxed{\text{B}}$ p_{n-2} $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{4}p_{n-2}$ $\boxed{\text{D}}$ p_n $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{4}p_{n-1}$

☐ **M56** La suite $\left(p_n\right)_{n\geqslant 0}$ vérifie, à partir du rang $n = 2$, la relation de récurrence :

$\boxed{\text{A}}$ $p_n = \dfrac{1}{2}p_{n-1} + \dfrac{1}{4}p_{n-2} + \dfrac{1}{8}$

$\boxed{\text{B}}$ $p_n = \dfrac{1}{4}p_{n-1} + \dfrac{1}{4}p_{n-2} + \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{C}}$ $p_n = \dfrac{1}{2}p_{n-1} + \dfrac{1}{2}p_{n-2} + \dfrac{1}{8}$

$\boxed{\text{D}}$ $p_n = \dfrac{1}{4}p_{n-1} + \dfrac{1}{4}p_{n-2} + \dfrac{1}{8}$

$\boxed{\text{E}}$ $p_n = \dfrac{1}{2}p_{n-1} + \dfrac{1}{4}p_{n-2} + \dfrac{1}{4}$

M57 La suite de terme général $u_n = 1 - p_n$ vérifie, à partir du rang $n = 0$, la relation de récurrence :

$\boxed{\text{A}}$ $u_{n+2} = \dfrac{1}{2}u_{n+1} + \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{1}{8}$

$\boxed{\text{B}}$ $u_{n+2} = \dfrac{1}{4}u_{n+1} + \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{3}{4}$

$\boxed{\text{C}}$ $u_{n+2} = \dfrac{1}{2}u_{n+1} + \dfrac{1}{4}u_n$

$\boxed{\text{D}}$ $u_{n+2} = \dfrac{1}{2}u_{n+1} + \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{1}{8}$

$\boxed{\text{E}}$ $u_{n+2} = \dfrac{1}{4}u_{n+1} + \dfrac{1}{4}u_n$

△ **L8** On pose $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.
Donner sans justification deux réels c et d tels que $x^2 = cx + d$ et $y^2 = cy + d$.

△ **L9** Donner sans justification deux réels a et b tels que $u_0 = a + b$ et $u_1 = ax + by$.

△ **R5** Démontrer que $u_n = ax^n + by^n$ pour tout entier naturel n.
On pourra tenir pour acquis tous les résultats antérieurs corrects sans en apporter de justification, et on suggère d'introduire la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \quad \text{« } u_n = ax^n + by^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = ax^{n+1} + by_{n+1}.\text{ »}$$

☐ **M58** La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
A n'a pas de limite
B converge vers 0
C converge vers $\dfrac{1}{2}$
D converge vers 1
E on ne peut pas conclure au vu de ce qui précède

Exercice 8. Fonctions trigonométriques

Questions variées
△ **L10** Donner un nombre réel $a > 0$ tel que les solutions de l'équation

$$\cos(x)\cdot\sin(x) = 0$$

soient les réels de la forme $k\alpha$ où $k \in \mathbb{Z}$.
☐ **M59** La dérivée de la fonction qui à x dans $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right]$ associe $\ln[\cos(3x)]$ est la fonction qui à x associe :

A $-\dfrac{\sin(3x)}{3\cos(3x)}$ B $-3\dfrac{\sin(3x)}{\cos(3x)}$ C $\dfrac{3\sin(3x)}{\cos(3x)}$ D $-3\dfrac{\sin(3x)}{\cos^2(3x)}$ E $-\dfrac{\sin(3x)}{3\cos^2(3x)}$

☐ **M60** Sur l'intervalle $]0\,;\,\pi[$, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$:
A est croissante puis décroissante
B est décroissante puis croissante
C est croissante
D n'est pas définie en tout point
E est décroissante

Étude d'une famille de fonctions

Soit a et b deux nombres réels. On définit une fonction $f_{a,\,b}$ sur $\mathbb{R}$ par

$$f_{a,\,b}(x) = \cos(ax+b)\mathrm{e}^{ax}.$$

☐ **M61** La dérivée de $f_{2,\,0}$ est la fonction qui à tout réel x associe :
A $f_{2,\,0}(x)$
B $[\cos(2x)+\sin(2x)]\,\mathrm{e}^{2x}$
C $2\,[\cos(2x)+\sin(2x)]\,\mathrm{e}^{2x}$
D $[\cos(2x)-\sin(2x)]\,\mathrm{e}^{2x}$
E $[\cos(2x)-\sin(2x)]\,\mathrm{e}^{2x}$

☐ **M62** Soit, pour n entier naturel, $u_n = \ln\left|f_{2,\,0}\left(\frac{\pi}{3}+n\pi\right)\right|$. La suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ tend alors vers :

A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B 2π C $+\infty$ D 0 E 1

On admet la formule suivante : pour tous a et x dans $\mathbb{R}$,

$$\sin(x-a)=\cos(a)\sin(x)-\sin(a)\cos(x).$$

☐ **M63** En choisissant convenablement le nombre a dans la formule précédente, on peut voir que les solutions de l'équation $\cos(x)=\sin(x)$sont :

$\boxed{\text{A}}$ les nombres de la forme $\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

$\boxed{\text{B}}$ les nombres de la forme $-\dfrac{k\pi}{3}$ où $k\in\mathbb{Z}$

$\boxed{\text{C}}$ aucune des autres réponses proposées

$\boxed{\text{D}}$ les nombres de la forme $\dfrac{k\pi}{4}$ où $k\in\mathbb{Z}$

$\boxed{\text{E}}$ les nombres de la forme $\dfrac{k\pi}{6}$ où $k\in\mathbb{Z}$

Vrai ou faux ?

On conserve les notations de la partie précédente. Dans les questions **M64** à **M69**, on demande d'évaluer la valeur logique (Vrai ou Faux) des propositions indiquées.

☐ **M64** En tout réel où la dérivée de $f_{1,\,0}$ s'annule, cette dérivée change de signe.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M65** En tout réel x où la dérivée de $f_{1,\,0}$ s'annule, la fonction $f_{1,\,0}$ a un maximum local, autrement dit on peut trouver des réels y, z tels que $y<x<z$ et $f_{1,\,0}(x)$ soit la plus grande valeur prise par $f_{1,\,0}$ sur le segment $[y\,;\,z]$

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M66** En l'abscisse de tout point où les courbes représentatives de la fonction $f_{1,\,0}$ et de la fonction $x\longmapsto \mathrm{e}^x$ se touchent, la dérivée de $f_{1,\,0}$ s'annule.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ 67 Si $a\neq 0$, alors en $+\infty$ la fonction $f_{a,\,b}$ tend vers 0 ou $+\infty$.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ 68 Si $a\neq 0$, alors ou bien la fonction $f_{a,\,b}$ tend vers 0 en $+\infty$, ou bien elle tend vers 0 en $-\infty$.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ 69 La fonction $f_{a,\,b}$ est périodique si et seulement si $a=0$.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

Exercice 9. Distance d'un point à une courbe

On considère, dans un repère orthonormé du plan, la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=-2x^2$. On considère le point A de coordonnées $(0\,;\,-1)$, et le point B de coordonnées $(0\,;\,1)$.

☐ **M70** Soit b et c deux nombres réels.
La plus petite valeur prise par x^2+bx+c lorsque x varie dans $\mathbb{R}$ est systématiquement :

A $\dfrac{-4c+b^2}{4}$
B $\dfrac{4c-b^2}{2}$
C aucune des autres expressions proposées
D $\dfrac{4c-b^2}{4}$
E $2c-b^2$

On note d la plus courte distance de A à un point de $\mathscr{C}$.

☐ **M71** Que vaut d ?

A $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ B $\dfrac{\sqrt{11}}{5}$ C $\dfrac{2}{3}$ D 1 E $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

On considère maintenant un point M_0 de $\mathscr{C}$ à distance d de A, et on considère la tangente Δ à $\mathscr{C}$ au point M_0.

☐ **M72** Le point d'intersection de Δ avec l'axe des ordonnées a pour ordonnée :

A cela dépend du choix de M_0 B 0 C $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ D $\dfrac{3}{2}$ E $\dfrac{3}{4}$

☐ **M73** Le point d'intersection de Δ avec l'axe des abscisses a pour abscisse :

A 0 B $\dfrac{3}{4}$ C cela dépend du choix de M_0 D $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ E $\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

☐ **M74** La plus courte distance de B à un point de C vaut :

A aucune des autres valeurs proposées B $\dfrac{3}{4}$ C 1 D $\dfrac{3}{2}$ E $\dfrac{1}{2}$