∽ Évaluation ESciA session 25 mars 2023 ∽

Mathématiques générales avancées Épreuve 1

Durée : 1h 30 min

FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

• Les questions à *choix multiples* sont numérotées M1, M2 etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □.
Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse.
Toute réponse fausse retire des points aux candidats.
Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).

• Les questions *à réponse brute* sont numérotées L1, L2, etc.
Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.

• Les questions *à réponse rédigée* sont numérotées R1, R2, etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

CONSEILS DE BON SENS

• L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
• Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
• Ne répondez jamais au hasard à une question à choix multiples !
• Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Calcul algébrique et analyse

☐ **M1** Pour tout choix du nombre réel x différent de -1, la quantité $\dfrac{x^2}{x^2+1}-\dfrac{1}{x+1}$ est égale à :

A $\dfrac{x^3+1}{\left(x^2+1\right)(x+1)}$

B $\dfrac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)(x+1)}$

C aucune des autres réponses

D $\dfrac{x}{x+1}$

E $\dfrac{x^3-1}{\left(x^2+1\right)(x+1)}$

☐ **M2** Pour tout choix du nombre réel x différent de 0 et de -1, la quantité $\dfrac{x}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$ est égale à :

A aucune des autres réponses B $\dfrac{x^3}{x+1}$ C $\dfrac{x+1}{x^2}$ D x E $\dfrac{x}{x+1}$

☐ **M3** Pour tout choix du nombre réel x différent de 0, 1 et -1, la quantité $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x}$ est égale à :

A $\dfrac{2}{x\left(x^2-1\right)}$

B $\dfrac{-2}{x\left(x^2-1\right)}$

C $\dfrac{2x+2}{x(x+1)(x-1)}$

D $\dfrac{2x-2}{x(x+1)(x-1)}$

E $\dfrac{2}{x\left(x^2\right)-1}$

☐ **M4** L'équation $\dfrac{1}{x^2}=5x$ d'inconnue réelle x :

A a exactement deux solutions

B n'a pas de solution

C a exactement une solution

D a une infinité de solutions

E a au moins trois solutions, et un nombre fini de solutions

☐ **M5** L'équation $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{3}{x-1}$ a pour ensemble de solutions :

A l'ensemble vide B $\{-2\}$ C $\{-1\ ;\ 1\}$ D $\{3\}$ E $\{0\}$

☐ **M6** L'équation $2x^2-x+\dfrac{1}{9}=0$ a pour solutions :

A $\frac{3}{4}$

B $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$

C 1 et 2

D $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$

E aucune des autres réponses proposées

☐ **M7** L'inéquation $x^3 > 8$ a pour ensemble de solutions :

A aucune des autres réponses proposées

B $]-\infty\,;\,-2[\cup]2\,;\,+\infty[$

C $]-\infty\,;\,-2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}\,;\,+\infty[$

D $]2\sqrt{2}\,;\,+\infty[$

E $]2\,;\,+\infty[$

☐ **M8** L'inéquation $x^2 - x - 1 < 0$ a pour ensemble de solutions :

A $\left]-\infty\,;\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,+\infty\right[$

B aucune des autres réponses proposées

C $\left]-\infty\,;\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,+\infty\right[$

D $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

E $\left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$

☐ **M9** La somme des solutions distinctes de l'équation $\sqrt{x^3+x} = x\sqrt{2}$ vaut :

A 23 B 2 C 0 D -1 E 1

△**L1** Donner sans justification l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x+1} > -1$.

☐ **M10** Soit x et y deux nombres réels. Sachant que $x - y > y$ et $x + y < y$, on peut affirmer que :

A $x < 0$ et $y < 0$ B $x < 0$ et $y > 0$ C $y < x$ D $x < y$ E $x < y < 0$

☐ **M11** Vrai ou faux? L'inéquation $\text{e}^x \geqslant x^{2023} + 5$ a une infinité de solutions réelles.

A Vrai B Faux

☐ **M12** Pour tout choix des nombres réels x, y, et z, le nombre $x^3 + y^3 + z^3$ est égal à :

A $3xyz + (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$

B $xyz + (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$

C $xyz + (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$

D $3xyz + (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$

E aucune des autres réponses proposées

☐ **M13** Soit a et b deux nombres réels tels que l'égalité $\frac{35x-29}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$ soit vraie pour tout réel x différent de 1 et 2. Alors, $a + 2b$ vaut :

A 56 B -14 C -23 D 88 E 76

△ **L2** Donner sans justification les triplets $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant simultanément les relations

$$z^x = y^{2x},\quad 2^z = 2^x \quad \text{et} \quad x + y + z = 10.$$

□ **M14** Le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^x = x + 1$ est :

A 0 B 4 C 3 D 2 E 1

○ **R1** Justifier votre réponse à la question **M14** .

Exercice 2. Géométrie dans l'espace

L'espace affine euclidien est rapporté à un repère orthonormal. On considère les quatre points

$$A\left(1\ ;\ 1\ ;\ \sqrt{6}\right),\ B\left(1\ ;\ -1\ ;\ \sqrt{6}-2\right),\ C\left(1+\sqrt{6}\ ;\ 0\ ;\ 1+\sqrt{6}\right) \text{ et } D\left(1+\sqrt{6}\ ;\ -2\ ;\ -1+\sqrt{6}\right).$$

△ **L3** Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

◯ **R2** Justifier très brièvement que A, B, C, D sont coplanaires.

△ **L4** Expliciter un vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ orthogonal à la fois à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

☐ **M15** Le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M16** Le quadrilatère ABDC est un losange.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M17** Le quadrilatère ABDC est un carré.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

Un cube

On se donne un cube $\mathscr{C}$ de l'espace dont les faces ont la même aire que ABDC.

☐ **M18** Le volume du cube $\mathscr{C}$ est égal à :

$\boxed{\text{A}}$ $16\sqrt{2}$ $\boxed{\text{B}}$ $4\sqrt{6}$ $\boxed{\text{C}}$ $6\sqrt{6}$ $\boxed{\text{D}}$ 8^3 $\boxed{\text{E}}$ $2\sqrt{6}$

☐ **M19** On considère la sphère dont le centre est le centre du cube $\mathscr{C}$ et qui passe par ses huit sommets. Le rayon de cette sphère est :

$\boxed{\text{A}}$ 4 $\boxed{\text{B}}$ $2\sqrt{6}$ $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{6}$ $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{8}$ $\boxed{\text{E}}$ 1

Exercice 3. Calculs de limites

☐ **M20** La limite de $3x^6 - 10x^2 + 4$ quand x tend vers $-\infty$:

A est $-\infty$ B n'existe pas C est $+\infty$ D est $3x^6$ E est 4

☐ **M21** La limite de $\left(\dfrac{1}{x} + x\right)\ln(x)$ quand x tend vers 2 :

A est finie et non nulle B est $+\infty$ C n'existe pas D est 0 E est $-\infty$

☐ **M22** La limite de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x} - 1}$ quand x tend vers $+\infty$ est

A est $-\infty$ B n'existe pas C est $+\infty$ D est finie et non nulle E est 0

☐ **M23** + La limite de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ quand x tend vers 0^+ :

A est $+\infty$ B est $-\infty$ C n'existe pas D est finie et non nulle E est 0

☐ **M24** La limite de $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}$ quand x tend vers $+\infty$:

A n'existe pas B est 0 C est $-\infty$ D est finie et non nulle E est $+\infty$

☐ **M25** La limite de $\ln(3x + 1) - \ln(x)$ quand x tend vers $+\infty$:

A est $-\infty$ B n'existe pas C est $+\infty$ D est finie et non nulle E est 0

☐ **M26** La limite de $\dfrac{\ln(x) - x}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$:

A est $+\infty$ B est 0 C est $-\infty$ D n'existe pas E est finie et non nulle

☐ **M27** La limite de $\dfrac{x^2 - 3x^3}{x^4\mathrm{e}^x - 1}$ quand x tend vers $-\infty$:

A est $+\infty$ B est finie et non nulle C est 0 D est $-\infty$ E n'existe pas

☐ **M28** La limite de $\dfrac{x^2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x\ln(x)}{1 + x^2\mathrm{e}^x}$ quand x tend vers $-\infty$:

A est $+\infty$ B est $-\infty$ C est 0 D n'existe pas E est finie et non nulle

☐ **M29** La limite de $\dfrac{xe^x}{\sqrt{1+x^2}-1}$ quand x tend vers 0^+ :

A est $+\infty$ B est finie et non nulle C est $-\infty$ D n'existe pas E est 0

△ **L5** Donner sans justification la limite ℓ de $\dfrac{xe^x}{\sqrt{1+x}-1}$ quand x tend vers 0^+.

Exercice 4. Calculs de dérivées

☐ **M30** La dérivée de la fonction qui à x associe $-\dfrac{1}{x}+\ln(x)$ est la fonction qui à x associe :

A $\dfrac{x+2}{x^2}$ B $\ln(x)+\dfrac{1}{x}$ C $\dfrac{2}{x}$ D $\dfrac{x+1}{x^2}$ E $\dfrac{-1+x}{x^2}$

☐ **M31** La dérivée de la fonction qui à x associe $\left(x^2+1\right)\ln(x)$ est la fonction qui à x associe :

A 2
B $2x\ln(x)-1$
C 1
D $2x\ln(x)+x+1$
E aucune des autres propositions indiquées

☐ **M32** La dérivée de la fonction qui à x associe $\dfrac{2+x}{2-x}$ est la fonction qui à x associe :

A $\dfrac{-2x}{(2-x)^2}$
B aucune des autres propositions indiquées
C $\dfrac{3-4x}{(2-x)^2}$
D $\dfrac{-2}{(2-x)^2}$
E $\dfrac{4}{(2-x)^2}$

☐ **M33** Sur $]2\,;\,+\infty[$, la fonction qui à x associe $\dfrac{2+x}{2-x}$ est :

A décroissante B croissante C ni croissante ni décroissante

☐ **M34** Sur $]-\infty\,;\,2[$, la fonction qui à x associe $\dfrac{2+x}{2-x}$ est :

A ni croissante ni décroissante B croissante C décroissante

☐ **M35** Sur $]-\infty\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$, la fonction qui à x associe $\dfrac{2+x}{2-x}$ est :

A décroissante B croissante C ni croissante ni décroissante

☐ **M36** La dérivée de la fonction qui à x associe $\ln\left(1+x^2\right)$ est la fonction qui à x associe :

$\boxed{\text{A}}$ $\ln(2x)$
$\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{2x}{1+x^2}$
$\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{2x}$
$\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{1+x^2}$
$\boxed{\text{E}}$ aucune des autres propositions indiquées

☐ **M37** La dérivée de la fonction qui à x associe $\exp(\mathrm{e}^x)$ est la fonction qui à x associe :

$\boxed{\text{A}}$ $\exp(x+\mathrm{e}^x)$
$\boxed{\text{B}}$ $\exp(x+\mathrm{e}^x-1)$
$\boxed{\text{C}}$ $\exp(\mathrm{e}^x)$
$\boxed{\text{D}}$ e^{2x}
$\boxed{\text{E}}$ aucune des autres propositions indiquées

☐ **M38** La dérivée de la fonction qui à x (réel strictement positif) associe $\sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ est la fonction qui à x associe :

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{x+1}{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

△ **L6** Donner une expression, la plus simplifiée possible, de la dérivée de la fonction qui à x associe $\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}\right)$.

Exercice 5. Probabilités

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On lance un dé équilibré à n faces numérotées de 1 à n.
On lance ensuite une pièce équilibrée autant de fois que le résultat obtenu lors du lancer de dé (par exemple, si le dé est tombé sur 3, on lancera 3 fois la pièce), puis on compte le nombre de fois que la pièce est tombée sur Pile.
On note X la variable aléatoire donnant le résultat du dé, et Y la variable aléatoire donnant le nombre de « Pile » obtenus.
Dans les questions ☐ **M39** à ☐ **M44** , on suppose $n = 2$.
On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.

☐ **M39** La variable aléatoire Y prend les valeurs :

A $0,\ 1,\ 2$ B $0,\ 1$ C $0,\ 2$ D $1,\ 2$ E aucune des autres réponses

☐ **M40** Sachant que le dé est tombé sur 2, la probabilité d'obtenir deux « Pile » lors des deux lancers vaut :

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{3}{4}$ C $\frac{1}{3}$ D $\frac{1}{4}$ E $\frac{1}{6}$

☐ **M41** $P(Y = 2)$ vaut :

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{1}{8}$ C $\frac{1}{2}$ D $\frac{1}{4}$ E $\frac{1}{3}$

☐ **M42** $P(Y = 0)$ vaut :

A $\frac{1}{8}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{2}{5}$ D $\frac{3}{8}$ E $\frac{5}{12}$

☐ **M43** $P(Y = 1)$ vaut :

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{5}{12}$ C $\frac{5}{6}$ D $\frac{3}{4}$ E $\frac{2}{5}$

☐ **M44** L'espérance de Y est égale à :

A $\frac{5}{8}$ B $\frac{3}{4}$ C $\frac{4}{5}$ D 2 E 1

On revient au cas général, où n est quelconque et supérieur ou égal à 2.

☐ **M45** $P(Y = 0)$ vaut :

A $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$

B $1-\frac{1}{2^n}$

C aucune des autres valeurs proposées

D $\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

E $\dfrac{1}{2n}$

☐ **M46** Pour tout entier k compris entre 1 et n, la probabilité $P(Y = k)$ vaut :

A $\dfrac{1}{2^n}\left[\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{n}{k}\right]$

B $\dfrac{1}{n}\binom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}$

C $\dfrac{1}{n2^n}\left[\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{n}{k}\right]$

D $\binom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}$

E $\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{2^k}\binom{k}{k}+\dfrac{1}{2^{k+1}}\binom{k+1}{k}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\binom{n}{k}\right]$

Exercice 6. Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n+(u_n)^2}-\dfrac{1}{2}$ pour tout entier naturel n.

On définit aussi une suite v par la relation $v_n = (u_n)^2 + u_n$ pour tout entier naturel n.

☐ **M47** Vrai ou faux ? On a $u_n \geqslant -\dfrac{1}{2}$ pour tout entier naturel n.

A Faux B Vrai

☐ **M48** Laquelle des assertions suivantes est vraie ?

A La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ n'est ni arithmétique ni géométrique

B La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$

C La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

D La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est arithmétique de raison $\dfrac{3}{4}$

E La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est arithmétique de raison $-\dfrac{3}{4}$

☐ **M49** Pour tout entier naturel n :

A $v_n = \dfrac{3n}{4}+2$ B $v_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ C $v_n = \dfrac{3n}{4}+1$ D $v_n = \dfrac{3n}{4}$ E $v_n = \dfrac{1}{2^n}$

☐ **M50** Pour tout entier naturel n :

A $u_n = \dfrac{-1-\sqrt{9+3n}}{2}$

B $u_n = \dfrac{-1-\sqrt{1+3n}}{2^n}$

C $u_n = \dfrac{-1+\sqrt{9+3n}}{2}$

D $u_n = \dfrac{-1+\sqrt{\dfrac{3n}{4}+2}}{2}$

E $u_n = \dfrac{-1+\sqrt{\dfrac{3n}{4}}}{2^n}$

☐ **M51** La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$:

A n'est ni croissante ni décroissante B est croissante C est décroissante

☐ **M52** La limite de u :

A vaut 1 B vaut $+\infty$ C vaut $\dfrac{1}{2}$ D vaut $-\infty$ E vaut 0

Dans la suite de l'énoncé, on se donne une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 0}$ quelconque ainsi qu'un réel α quelconque. Si possible, on définit une suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ par la condition initiale $b_0 = \alpha$ et la relation de récurrence :

$$b_{n+1}=\sqrt{a_n+b_n+(b_n)^2}-\frac{1}{2},\ \text{pour tout entier naturel}\ \ n.$$

☐ **M53** Parmi les conditions suivantes sur $(a_n)_{n\geqslant 0}$, une ou plusieurs garantissent que $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est définie quel que soit le choix de α. Précisez, parmi elles, celle qui est la moins contraignante sur $(a_n)_{n\geqslant 0}$.

[A] $a_n \geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
[B] $a_n \geqslant 21$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
[C] $a_n \leqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
[D] $a_n \geqslant \frac{1}{4}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
[E] $a_n \geqslant \frac{3}{4}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

☐ **M54** Parmi les conditions suivantes sur $(a_n)_{n\geqslant 0}$, une ou plusieurs garantissent que $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est définie et positive quel que soit le choix d'un α positif. Précisez, parmi elles, celle qui est la moins contraignante sur $(a_n)_{n\geqslant 0}$.

[A] $a_n \geqslant \frac{1}{4}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
[B] $a_n \geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
[C] $a_n \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
[D] $a_n \geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
[E] $a_n \geqslant \frac{3}{4}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

☐ **M55** Parmi les conditions suivantes sur $(a_n)_{n\geqslant 0}$, une ou plusieurs garantissent que $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est définie et positive à partir du rang 1 quel que soit le choix de α. Précisez, parmi elles, celle qui est la moins contraignante sur $(a_n)_{n\geqslant 0}$.

[A] $a_n \leqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
[B] $a_n \geqslant \frac{3}{4}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
[C] $a_n \geqslant \frac{1}{4}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
[D] $a_n \geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
[E] $a_n \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

On suppose désormais que $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie. On suppose en outre que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1. On pose

$$c_n=b_n+(b_n)^2\ \text{pour tout entier naturel}\ n.$$

☐ **M56** Vrai ou faux? On peut affirmer que $c_{n+1}\geqslant c_n+\frac{3}{4}$ pour tout entier naturel n.

[A] Faux [B] Vrai

☐ **M57** Vrai ou faux? On peut affirmer que $c_{n+1}\geqslant c_n+\frac{1}{2}$ pour tout entier naturel n.

[A] Faux [B] Vrai

☐ **M58** Vrai ou faux? On peut affirmer qu'il existe un entier $n_0\geqslant 0$ tel que $c_{n+1}\geqslant c_n+\frac{3}{4}$ pour tout entier $n\geqslant n_0$.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M59** Vrai ou faux ? On peut affirmer qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 0$ tel que $c_{n+1} \geqslant c_n + \dfrac{1}{2}$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

◯ **R3** À l'aide des résultats (corrects) établis à ce stade, déterminer la limite de la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 7. Dérivées successives

Soit f une fonction de variable réelle, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Pour un nombre entier naturel non nul n, on définit, lorsque c'est possible, la dérivée n-ième de f comme la fonction $f^{(n)}$ obtenue au bout du procédé de construction par récurrence finie qui suit :
$f^{(1)} = f'$ et $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$ pour tout k compris entre 2 et n.
Par exemple, lorsque $f^{(2)}$ est définie elle est égale à la dérivée seconde f'' de f. La dérivée troisième de f est définie si et seulement si f'' est définie et dérivable, auquel cas $f^{(3)} = \left(f''\right)'$.
Et caetera.
Quoi qu'il arrive, on considère que la dérivée 0-ième de f est la fonction $f^{(0)} = f$.

☐ **M60** La dérivée troisième de la fonction f définie sur $]-\infty~;~1[$ par $f(x) = 3\ln(1-x)$ est la fonction qui à x associe :

A $\dfrac{-6}{(1-x)^3}$ B $\dfrac{6}{(1-x)^2}$ C $\dfrac{6}{(1-x)^3}$ D $\dfrac{3}{(1-x)^3}$ E $\dfrac{2}{(1-x)^3}$

☐ **M62** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. La dérivée seconde de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ est la fonction qui à x associe :

A n^2x^{n-2} B $n(n+1)x^{n-2}$ C $n(n-1)x^{n-2}$ D n^2x^{n-1} E $\left(n^2-1\right)x^{n-2}$

Une suite particulière de polynômes

Dans cette dernière partie, on considère la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f^{(n)}$ est définie et qu'il existe une fonction polynomiale H_n telle que .

$$f^{(n)}(x) = H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{pour tout réel } x$$

△ **L7** Donner une expression de $H_{n+1}(x)$ en fonction de H_n.

☐ **M62** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. La dérivée n-ième de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ est la fonction qui à x associe :

A $(n+1)!$ B $n(n-2)!$ C $(n-1)!x$ D 0 E $n!$

☐ **M63** Soit n un entier naturel. La dérivée $(n+1)$-ième de la fonction f définie sur $]-\infty~;~1[$ par $f(x) = -\ln(1-x)$ est la fonction qui à x associe :

A $\dfrac{n!}{(1-x)^n}$ B $\dfrac{(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}}$ C $\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ D $\dfrac{(-1)^n(n+1)!}{(1-x)^{n+1}}$ E $\dfrac{(n+1)!}{(1-x)^{n+1}}$

Fonctions polynomiales

On dit qu'une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est **'polynomiale de degré n** lorsqu'il existe des réels fixes $a_0, \ldots, a_n$, avec $a_n \neq 0$, tels que g associe à tout réel x le réel $a_0 + a_1 + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n$.
On convient également que la fonction identiquement nulle est polynomiale (mais sans degré).
Par exemple, la fonction qui à x associe 2 est polynomiale de degré 0; la fonction qui à x associe $4x^3 - x$ est polynomiale de degré 3.

☐ **M64** Si g est polynomiale de degré n alors :

A $g(k)$ est polynomiale de degré $n-k$ pour tout entier k compris entre 0 et n
B $g(k)$ est polynomiale de degré $n+1-k$ pour tout entier k compris entre 1 et $n+1$
C $g(k)$ est polynomiale de degré $n-k$ pour tout entier k compris entre 0 et $n+1$
D aucune des autres propositions indiquées n'est systématiquement vraie
E $g(k)$ est polynomiale de degré $n+1-k$ pour tout entier k compris entre 1 et n

☐ **M65** La fonction exponentielle est-elle polynomiale ?

A Non B Oui

△**R4** Justifier la réponse à la question **M65** en s'appuyant sur le résultat de la question **M64**.

Comptage de zéros

On admet que les trois résultats suivants valent pour toute fonction dérivable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

- étant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et $f(a) = f(b) = 0$, la fonction f' s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]a\,;\,b[$;
- étant donné un réel a tel que $f(a) = \lim\limits_{+\infty} f = 0$, la fonction f' s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$;
- étant donné un réel a tel que $f(a) = \lim\limits_{-\infty} f = 0$, la fonction f' s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]-\infty\,;\,a[$.

☐ **M66** Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et p un entier naturel non nul. On suppose que f s'annule en au moins p nombres réels.
Parmi les conclusions suivantes, laquelle est la plus forte que l'on puisse obtenir en général grâce aux résultats admis ?

A aucune des autres conclusions proposées n'est vraie
B f' s'annule en au moins p nombres réels
C f' s'annule en au moins $p+1$ nombres réels
D f' s'annule en au moins $p-1$ nombres réels

☐ **M67** Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et p un entier naturel non nul. On suppose, pour un certain entier $n > 0$, que f admet une dérivée n-ième. On suppose enfin que f s'annule en au moins p nombres réels.
Parmi les conclusions suivantes, laquelle est la plus forte que l'on puisse obtenir en général ?

A $f^{(n)}$ s'annule en au moins $p+n$ nombres réels
B $f^{(n)}$ s'annule en au moins p nombres réels
C $f^{(n)}$ s'annule en au moins $p-n$ nombres réels
D aucune des autres conclusions proposées n'est vraie

△ **R5** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, supposée polynomiale de degré $n > 0$. En combinant plusieurs résultats antérieurs, démontrer brièvement que f s'annule en au plus n réels.

Une suite particulière de polynômes

Dans cette dernière partie, on considère la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f^{(n)}$ est définie et qu'il existe une fonction polynomiale H_n telle que

$$f^{(n)}(x) = H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{pour tout réel } x.$$

△ **L7** Donner une expression de $H_{n+1}(x)$ en fonction de $H_n(x)$.

☐ **M68** Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction H_n est polynomiale de degré :

A $2n-1$	B 2^{n-1}	C n	D 0	E aucune des autres réponses proposées

On admet que $f^{(n)}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$, pour tout $n \geqslant 1$.

☐ **M69** En appliquant par récurrence les principes admis avant la question **M66**, la conclusion la plus forte que l'on puisse en tirer est que, pour tout $n \geqslant 1$:

A $f^{(n)}$ s'annule au moins $2n$ fois
B $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois
C aucune des autres propositions n'est vraie
D $f^{(n)}$ s'annule au moins $n-1$ fois
E $f^{(n)}$ s'annule au moins 2^{n-1} fois

☐ **M70** Au vu de tout ce qui précède, on peut conclure que :

A $f^{(n)}$ s'annule exactement 2^{n-1} fois
B $f^{(n)}$ s'annule exactement $2n-1$ fois
C $f^{(n)}$ s'annule exactement n fois
D aucune des autres propositions n'est vraie
E $f^{(n)}$ s'annule exactement $n-1$ fois

Exercice 8. Géométrie plane

Dans tout l'exercice, dont les parties sont indépendantes les unes des autres, on se place dans un plan euclidien.

Triangles

☐ **M71** Soit a, b, c trois nombres réels strictement positifs. Pour qu'il existe un triangle non aplati dont les longueurs des côtés sont a, b et c, il est nécessaire et suffisant que :

A $c < b + a$ et $b < a + c$
B $c < a + b$ si on suppose d'emblée que $c \geqslant a$ et $c \geqslant b$
C aucune des autres réponses proposées
D $a < b + c$ et $b < a + c$
E $a < b < c$

☐ **M72** Combien existe-t-il d'entiers $n > 0$ tels qu'il existe un triangle non aplati dont les longueurs des côtés soient $\ln(12)$, $\ln(75)$ et $\ln(n)$?

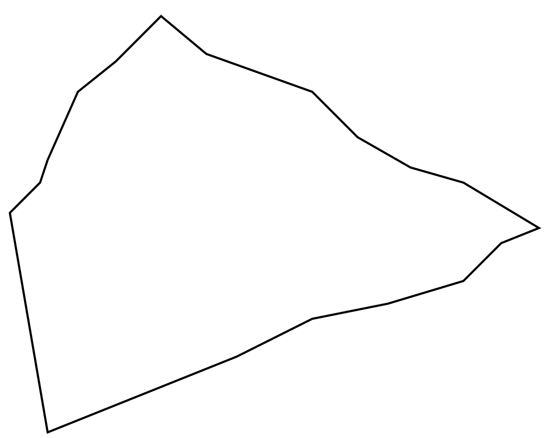
A 93 B 900 C 94 D Une infinité E 893 degrés

☐ **M73** Combien existe-t-il d'entiers $n > 0$ tels qu'il existe un triangle non aplati dont les longueurs des côtés soient $\ln(12)$, $\ln(54)$ et $\ln(n)$?

A Une infinité B 645 C 644 D 646 E 643

Polygones

On se donne ici un polygone P à 18 sommets. On le suppose convexe, c'est-à-dire que la mesure de n'importe lequel de ses angles intérieurs est inférieure à 180 degrés.



☐ **M74** La moyenne des mesures des angles intérieurs au polygone P vaut :

A 180 degrés B 170 degrés C 165 degrés D 160 degrés E 170 degrés

☐ **M75** On suppose que les mesures des angles intérieurs à P forment une suite arithmétique. Quelle valeur ne peut *pas* prendre la plus petite de ces mesures ?

$\boxed{\text{A}}$ 130 degrés $\boxed{\text{B}}$ 145 degrés $\boxed{\text{C}}$ 150 degrés $\boxed{\text{D}}$ 155 degrés $\boxed{\text{E}}$ 159 degrés

☐ **M76** On suppose que les mesures (calculées en degrés) des angles intérieurs à P forment une suite arithmétique à termes entiers.
Quelle valeur ne peut *pas* prendre la plus petite de ces mesures ?

$\boxed{\text{A}}$ 146 degrés $\boxed{\text{B}}$ 147 degrés $\boxed{\text{C}}$ 143 degrés $\boxed{\text{D}}$ 145 degrés $\boxed{\text{E}}$ 144 degrés

Figures

△ **L8** On considère un carré ABCD. Soit E un point de [A, D] et F un point de [B, C] tels que

$$\text{BE} = \text{EF} = \text{FD} = 30.$$

Que vaut l'aire du carré ABCD ?

△ **L9** On considère un carré ABCD de côté 5. Soit E et F deux points extérieurs au carré tels que BE = DF = 3 et AE = CF = 4. Que vaut EF ?