Baccalauréat C Espagne[1] juin 1987

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on associe au point m d'affixe $z (z \neq 2\text{i})$ le point M d'affixe Z, défini par

$$Z = \frac{z - 3 + \text{i}}{2\text{i} - z}.$$

1. Déterminer et construire l'ensemble des points m tels que Z soit réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points m pour lesquels

$$\arg Z = \frac{3\pi}{2} \quad (\text{modulo } 2\pi).$$

3. Déterminer et construire l'ensemble des points m pour lesquels

$$|Z| = 2.$$

Toutes ces questions peuvent être traitées géométriquement en utilisant les points A d'affixe 2i et B d'affixe $3 - \text{i}$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans le plan orienté, on trace un triangle ABC non isocèle et tel que
$\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad (\text{modulo } 2\pi)$.
Soit d_1 la demi-droite d'origine B contenant A.
Soit d_2 la demi-droite d'origine C contenant A.
On place sur d_1 un point P différent de B et sur d_2 un point Q différent de C, tels que BP = CQ.

1. Justifier l'existence d'une unique rotation r transformant B en C et P en Q.
   Préciser l'angle de r. Construire le centre O de r et prouver que ce point est indépendant de P et Q.
2. Quelle est la nature du triangle OPQ ?
3. Construire les points P sur d_1 et Q sur d_2 sachant que BP = CQ = PQ.

PROBLÈME **12 POINTS**

Ce problème a pour buts, d'une part d'étudier la suite $\frac{n^n \text{e}^{-n}}{n!}$, d'autre part de donner une expression de e^a comme limite d'une suite.

Pour tout entier $n > 0$, on note f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

1. Espagne, Amérique centrale

$$f_n(x) = \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}.$$

On appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prendra $\| \vec{\imath} \| = 2$ cm et $\| \vec{\jmath} \| = 10$ cm.

Partie A

1. Déterminer le tableau de variations de f_n sur $[0 ; +\infty[$.
2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, étudier la position relative de $\mathscr{C}_n$ et de $\mathscr{C}_{n+1}$ et vérifier que le point A_n de coordonnées $\left(n ; f_n(n)\right)$ appartient à $\mathscr{C}_{n-1}$.
3. Construire avec soin, sur un même graphique, les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$; on placera les tangentes en O à ces trois courbes.

Partie B

Le but de cette seconde partie est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}*$ par $u_n = f_n(n)$.

1. **a.** En utilisant les résultats du A, démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   b. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

   On se propose, dans les questions suivantes, de déterminer la limite de cette suite.
2. **a.** Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par

   $$g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}.$$

   En utilisant les variations de g, démontrer que pour tout t de $[0 ; 1]$ on a

   $$\ln(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{4}.$$

   b. En déduire que pour tout entier $n > 0$ on a

   $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{1 - \frac{1}{4n}}.$$
3. **a.** Démontrer que pour tout entier $n > 0$ on a

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{4n}}.$$

   b. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a

   $$u_n \leqslant \mathrm{e}^{-1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right)}.$$

4. **a.** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a

$$\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}.$$

(On pourra utiliser des considérations d'aire.)

b. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a

$$u_n \leqslant \mathrm{e}^{-1-\frac{1}{4}\ln n}.$$

c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Partie C

Pour tout entier $n > 0$ et pour tout réel a positif ou nul, fixé, on pose

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n \mathrm{e}^{-t}}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer $I_n(a)$.

2. Démontrer que pour tout entier $n > 0$ et tout réel t positif ou nul, on a

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{t^n}{n!}.$$

En déduire un encadrement de $I_n(a)$.

3. **a.** Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a

$$\frac{1}{n!} \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n.$$

(On pourra utiliser B 1. a.

b. Déterminer alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$ puis la limite de $I_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

4. **a.** Établir pour tout entier $n \geqslant 2$ une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

b. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a

$$I_n(a) = 1 - \mathrm{e}^{-a\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right)}.$$

Cette égalité reste-t-elle valable pour $n = 1$?

5. Démontrer que pour tout a de $[0\,;\,+\infty[$ on a

$$\mathrm{e}^a = \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right).$$