

♣ Baccalauréat C Espagne juin 1989 ♣

EXERCICE 1

5 POINTS

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation en Z :

$$Z^2 + (1 - \sqrt{3})Z - \sqrt{3} = 0.$$

2. Résoudre dans \mathbb{C} les équations en z :

$$(1) \quad z + \frac{1}{z} = -1$$

$$(2) \quad z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$$

On désigne par α et α' les solutions de l'équation (1), par β et β' celles de l'équation (2).

3. Soit

$$f(z) = z^4 + (1 - \sqrt{3})z^3 + (2 - \sqrt{3})z^2 + (1 - \sqrt{3})z + 1.$$

Vérifier que pour tout nombre complexe z non nul,

$$\frac{f(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + (1 - \sqrt{3})\left(z + \frac{1}{z}\right) - \sqrt{3}.$$

4. Dédurre de l'étude précédente que α , α' , β , β' sont solutions dans \mathbb{C} de l'équation $f(z) = 0$.

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit ABC un triangle équilatéral du plan. On pose $AB = a$, où a est un réel strictement positif; l'unité du plan étant le centimètre, on prendra $a = 6$ pour la figure demandée au 3.

1. Soit m un réel différent de -2 . On note G_m le barycentre du système $\{(A, m), (B, 1), (C, 1)\}$.

Déterminer l'ensemble (E_1) des points G_m lorsque m décrit \mathbb{R} en restant différent de -2 .

2. On note G l'isobarycentre des trois points A, B, C .

- a. Déterminer l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2.$$

- b. Déterminer l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que

$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0.$$

3. Faire une figure où l'on représentera le triangle ABC et les ensembles (E_1) , (E_2) et (E_3) .

EXERCICE 2**5 POINTS****Enseignement de spécialité**

Les questions 1. et 2. peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

À la gare A, 16 voyageurs ont pris chacun un billet dont :

7 pour la gare B (prix du billet 50 francs)

5 pour la gare C (prix du billet 60 francs)

4 pour la gare D (prix du billet 75 francs).

1. On choisit au hasard un de ces voyageurs.
Soit X la variable aléatoire associant à chaque voyageur le prix de son billet (en francs).
 - a. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - b. Calculer l'espérance mathématique de X .
2. On choisit au hasard trois de ces voyageurs.
 - a. Calculer la probabilité pour que ces trois voyageurs aient trois destinations différentes.
 - b. Calculer la probabilité pour qu'au moins un des voyageurs ait un billet pour la gare B.
 - c. Quelle est la probabilité pour que cette destination soit B, sachant que les trois voyageurs ont la même destination.

PROBLÈME**4 POINTS****A**

On note f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{-\cos x}.$$

1. Étudier la parité et la périodicité de f .
Construire son tableau de variations sur l'intervalle $[0; \pi]$.
Tracer la courbe représentative (\mathcal{C}) de la restriction de f à $[0; \pi]$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité de longueur est 5 cm.
2. On se propose de rechercher un encadrement de l'aire S , exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.
 - a. Étant donnés deux nombres réels u et v tels que $0 \leq u \leq v \leq \pi$, démontrer que l'on a

$$(v - u)f(u) \leq \int_u^v f(x) dx \leq (v - u)f(v)$$

et interpréter géométriquement ce résultat.

b. En utilisant le résultat précédent, établir l'encadrement suivant du nombre S :

$$\frac{\pi}{4} \left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] \leq S \leq \frac{\pi}{4} \left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f(\pi) \right]$$

c. En déduire une valeur approchée entière, à une unité près, du nombre S .

3. On se propose de rechercher les tangentes à (\mathcal{C}) issues de l'origine O .

a. Soit A le point de (\mathcal{C}) ayant pour abscisse a . Écrire une équation de la tangente en A à (\mathcal{C}) et montrer que cette tangente passe par O si, et seulement si, $a \sin a = 1$.

b. On définit la fonction numérique Ψ sur $]0 ; \pi]$ par

$$\Psi(x) = \sin x - \frac{1}{x}.$$

Étudier les variations de Ψ (on pourra étudier les variations de Ψ' pour connaître le signe de Ψ').

En déduire l'existence pour la fonction Ψ d'un maximum absolu M en un point x_0 (on ne cherchera à calculer ni x_0 , ni M).

Calculer $\Psi'(\pi/2)$ et $\Psi(\pi/2)$; en déduire la position de x_0 par rapport à $\pi/2$ et le signe de M .

Montrer alors que Ψ s'annule en deux points p et q de $]0 ; \pi]$ et donner, en la justifiant, une valeur décimale approchée par défaut, à 10^{-1} près, de chacune de ces racines p et q .

c. En utilisant les résultats précédents, conclure quant au nombre de tangentes à (\mathcal{C}) que l'on peut mener à partir de O .

B

On définit une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = \frac{1}{2} e^{-\cos n}$$

et, pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

1. Établir que pour tout entier naturel non nul n , on a l'encadrement

$$\frac{1}{ne} \leq u_n \leq \frac{e}{n}.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2. a. En utilisant le fait que pour tout x élément de l'intervalle $[n ; n+1]$ on a $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$ (n entier naturel non nul), démontrer que

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}.$$

En déduire l'inégalité $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

b. On pose

$$\Sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

En utilisant le résultat précédent, établir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Sigma_n = +\infty.$$

c. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

(On pourra utiliser l'encadrement obtenu au B. 1.)