Baccalauréat C Espagne juin 1990

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble (C) des points M de (P) d'affixe z vérifiant

$$\left|(1-\text{i}\sqrt{3})z-\sqrt{3}-\text{i}\right| = 4.$$

2. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S transformant le point A d'affixe i en O origine du repère et transformant le point B d'affixe $\sqrt{3}$ en B$'$ d'affixe -4i.
Préciser le centre, le rapport et l'angle de S.
3. En utilisant les résultats établis au 2. retrouver l'ensemble (C) défini au 1.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que AB = AC et $\left(\overrightarrow{\text{AB}},~\overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π.

Soient I, J, K les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

On appelle R la rotation de centre I et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{BC}}$.

On pose $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.

1. a. Déterminer l'image de K par f, et l'image de J par g.
   b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.
2. a. Déterminer la nature de la transformation $g \circ f^{-1}$ (f^{-1} étant l'application réciproque de f).
   b. Chercher l'image de A par $g \circ f^{-1}$ et caractériser alors cette application.
   c. Soit M un point quelconque du plan, M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g.
   Quelle est la nature du quadrilatère ACM_2M_1 ?

PROBLÈME **12 POINTS**

On considère pour n entier naturel non nul la fonction numérique f_n définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$\left\{\begin{array}{l c l}
f_n(x) & = & x^n(\ln x)^2 \text{ si } x \text{ appartient à }]0~;~+\infty[\\
f_n(0) & = & 0.
\end{array}\right.$$

On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (l'unité étant 4 cm).

Question préliminaire

Montrer que f_n a pour limite 0 en 0.

A. *Dans toute cette partie, on choisit* $n = 1$

1. Étudier la dérivabilité de f_1 en 0.

2. Établir le tableau de variations de f_1.

3. Construire la courbe (C_1) en précisant la tangente au point 0.

4. **a.** Écrire une équation cartésienne de la tangente à (C_1) en son point d'abscisse x_0 (x_0 réel strictement positif donné).

b. Quelle relation x_0 doit-il vérifier pour que cette tangente passe par le point A de coordonnées $(2\,;\,0)$?

5. **a.** Établir le tableau de variations de la fonction numérique h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = 2 - x + \ln x.$$

b. Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $]0\,;\,+\infty[$ deux solutions distinctes. Donner pour chacune d'elles un encadrement décimal d'amplitude 10^{-1}.

c. Déduire des questions précédentes le nombre de tangentes, autres que l'axe des abscisses, à la courbe (C_1) issues du point A$(2\,;\,0)$.

B. *Dans cette partie n appartient à* $\mathbb{N}*$

1. Étudier, pour $n \geqslant 2$, la dérivabilité de f_n en 0.

2. Établir, pour $n \geqslant 2$, le tableau de variations de f_n.

3. Étudier, pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$, la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}).

4. Construire la courbe (C_2) dans le même repère que (C_1) en précisant sa tangente au point O.

C. *Soit* λ *un réel appartenant à* $]0\,;\,1[$

Pour tout entier naturel n non nul on appelle $I_n(\lambda)$ l'intégrale définie par

$$I_n(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Étudier le sens de variation de la suite $(I_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrer qu'elle est convergente.

2. À l'aide de deux intégrations par parties calculer $I_n(\lambda)$ en fonction de n et de λ.

3. Déduire de 2. :

a. λ étant fixé, la limite de la suite $(I_n(\lambda))$ quand n tend vers $+\infty$.

b. n étant fixé, la limite $\Psi(n)$ de $I_n(\lambda)$ quand λ tend vers zéro.

4. En admettant que $\Psi(n)$ représente l'aire de la partie du plan délimitée par (C_n), les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et l'axe des abscisses, calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan délimitée par (C_1), (C_2) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.