∽ Baccalauréat mathématiques élémentaires ∾
Espagne–Portugal septembre 1963

EXERCICE 1

Résoudre l'équation

$$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos x + 1 = 0.$$

(On fera apparaître, au premier membre, le facteur $\cos x$.)

EXERCICE 2

1. Démontrer que l'égalité

$$a^2 = db^2,$$

où a, b, d sont des entiers positifs et où a et b sont premiers entre eux, entraîne $b = 1$ (on montrera que b divise a).

En déduire que, si d n'est pas un carré parfait, il n'existe aucune fraction égale à $\sqrt{d}$.

2. On désigne par $A\left(\sqrt{d}\right)$ l'ensemble des nombres qui sont de la forme $m + n\sqrt{d}$, où m et n sont des entiers relatifs quelconques et où l'entier d n'est pas un carré parfait.

Déterminer l'intersection des deux ensembles $A\left(\sqrt{2}\right)$ et $A\left(\sqrt{3}\right)$.

(On pourra commencer par démontrer que toute égalité de la forme

$$m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0,$$

où m, n, p sont des entiers relatifs, entraîne $m = n = p = 0$.)

PROBLÈME

Le plan est rapporté à deux axes rectangulaires, $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$; les unités sont les mêmes sur les deux axes.

1. Étudier le sens de variation et construire le graphe (C) (c'est-à-dire la courbe représentative) de la fonction

$$y = \frac{(x+a)}{x}\sqrt{a^2 - x^2},$$

où a représente une longueur donnée.

2. Soient A le point de coordonnées $(-a\ ;\ 0)$ et $t'\text{A}t$ un axe tel que $\left(\overrightarrow{\text{A}x},\ \overrightarrow{\text{A}t}\right) = \theta$ (avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$).

Si $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$, $t'\text{A}t$ coupe $y'\text{O}y$ en I et la courbe (C) en un point M autre que A.

Calculer en fonction de θ l'abscisse de M.

Montrer que $\overline{\text{IM}}$ est indépendant de θ et en déduire une définition géométrique simple de (C).

3. Soient M un point de (C), autre que A, et M_1 un point de (C) dont l'abscisse est de même signe que celle de M. La droite AM_1 coupe $y'Oy$ en I_1.

Construire le centre, Ω, de la rotation qui transforme $\overrightarrow{IM}$ en $\overrightarrow{I_1M_1}$.

Quelle est la position limite, ω, de Ω quand le point M_1 tend vers le point M ?

En déduire une construction géométrique de la tangente en M à la courbe (C).

4. Calculer, en fonction de l'abscisse x de M, l'abscisse du point d'intersection de la tangente en M à la courbe (C) avec $z'Oz$.

Soit P un point quelconque de $z'Oz$, d'abscisse x_0 ; discuter, selon la position de P, le nombre des tangentes que l'on peut mener de P à la courbe (C).

N. B. - Le **4.** peut être traité immédiatement après le **1.**