

∞ **Baccalauréat mathématiques élémentaires** ∞
Espagne–Portugal juin 1963

EXERCICE 1

Résoudre l'équation

$$\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos x + 1 = 0.$$

(On fera apparaître, au premier membre, le facteur $\cos x$.)

EXERCICE 2

1. Démontrer que l'égalité $a^2 = db^2$, où a, b, d sont des entiers positifs et où a et b sont premiers entre eux, entraîne $b = 1$ (on montrera que b divise a).

En déduire que, si d n'est pas un carré parfait, il n'existe aucune fraction égale à \sqrt{d} .

2. On désigne par $A(\sqrt{d})$ l'ensemble des nombres qui sont de la forme $m + n\sqrt{d}$, où m et n sont des entiers relatifs quelconques et où l'entier d n'est pas un carré parfait.

Déterminer l'intersection des deux ensembles $A(\sqrt{2})$ et $A(\sqrt{3})$. (On pourra commencer par démontrer que toute égalité de la forme

$$m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0,$$

où m, n, p sont des entiers relatifs, entraîne $m = n = p = 0$.)

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à deux axes rectangulaires, $x'Ox$ et $y'Oy$; les unités sont les mêmes sur les deux axes.

1. Étudier le sens de variation et construire le graphe (C) (c'est-à-dire la courbe représentative) de la fonction

$$y = \frac{x+a}{x} \sqrt{a^2 - x^2},$$

où a représente une longueur donnée.

2. Soient A le point de coordonnées $(-a; 0)$ et $t'At$ un axe tel que $(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{At}) = \theta$ (avec $0 \leq \theta \leq \pi$).

Si $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, $t'At$ coupe $y'Oy$ en I et la courbe (C) en un point M autre que A .

Calculer en fonction de θ l'abscisse de M .

Montrer que \overline{IM} est indépendant de a et en déduire une définition géométrique simple de (C).

3. Soient M un point de (C) , autre que A , et M_1 un point de (C) dont l'abscisse est de même signe que celle de M . La droite AM_1 coupe $y'Oy$ en I_1 .
Construire le centre, Γ , de la rotation qui transforme \overrightarrow{IM} en $\overrightarrow{IM_1}$.
Quelle est la position limite, ω , de Ω quand le point M_1 tend vers le point M ?
En déduire une construction géométrique de la tangente en M à la courbe (C) .
4. Calculer, en fonction de l'abscisse x de M , l'abscisse du point d'intersection de la tangente en M à la courbe (C) avec $x'Ox$.
Soit P un point quelconque de $x'Ox$, d'abscisse x_0 ; discuter, selon la position de P , le nombre des tangentes que l'on peut mener de P à la courbe (C) .

N. B. - Le 4 peut être traité immédiatement après le 1.