

∞ Baccalauréat C Étranger groupe I bis septembre 1981 ∞

EXERCICE 1

E est un espace vectoriel euclidien orienté par la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 f est l'application de E vers E définie par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}, \\ f(\vec{j}) = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}, \\ f(\vec{k}) = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est une rotation vectorielle. Déterminer son axe.
2. Déterminer $f \circ f$. Que peut-on en déduire pour f ?

EXERCICE 2

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division de 3^n par 7.
2. Déterminer le reste de la division par 7 du nombre A sachant que

$$A = (2243)^{325} + (1179)^{154}.$$

3. Le nombre B s'écrit en base 3 : $\overline{121010201}$. Déterminer le reste de la division de B par 7.

PROBLÈME

On désigne par \mathcal{C} l'espace vectoriel des fonctions numériques à variable réelle continues sur \mathbb{R}_+^* .

Partie A

1. Montrer que, f étant un élément de \mathcal{C} , on peut associer à tout réel a strictement positif un réel, noté $F(a)$, défini par

$$F(a) = \int_a^{3a} \frac{f(t)}{t} dt$$

2. a décrivant \mathbb{R}_+^* , on définit ainsi une fonction F de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t} dt$$

Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(x) = \frac{f(3x) - f(x)}{x}.$$

La fonction F est-elle élément de \mathcal{C} ?

3. Définir F dans les deux cas particuliers suivants :

- a. $f : t \mapsto \frac{1}{t}$;
- b. $f : t \mapsto 1$.

Partie B

On étudie le cas où f est l'application $f : t \mapsto \cos t$ c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt.$$

Le but de cette question est de dégager quelques propriétés de la fonction F définie par une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

1. Déterminer

- a. Le signe de $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$;
- b. Le signe de $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left| \frac{f(t)}{t} \right| \leq \frac{1}{t}$$

et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |F(x)| \leq \text{Log} 3.$$

3. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{Log} 3 - F(x) = 2 \int_x^{3x} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t} dt$$

et que

$$0 \leq \text{Log} 3 - F(x) \leq 2x^2.$$

En déduire que F admet une limite à droite au point 0.

4. Soit m la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$m(x) = \frac{\text{Log} 3 - F(x)}{x}.$$

Étudier la limite de m à droite au point 0.

Partie C

Soit G la fonction réelle telle que

$$\begin{cases} G(x) = F(x) & \forall x \in \mathbb{R}_+^* \\ G(0) = \text{Log} 3. \end{cases}$$

1. Démontrer que G est continue sur \mathbb{R}_+^* .
2. En exploitant la méthode d'intégration par parties, établir que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left| G(x) - \frac{\sin x - 3 \sin x}{3x} \right| \leq \frac{2}{3x}.$$

En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |G(x)| \leq \frac{2}{x}$$

et étudier la limite de G en $+\infty$.

3. Démontrer que G est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G'(x) = \frac{-4 \cos x \cdot \sin^2 x}{x}.$$

4. Déterminer l'ensemble des réels pour lesquels la fonction G présente un extremum.
Déterminer les intervalles sur lesquels G est :

- a. croissante;
- b. décroissante.

5. On désigne par G_1 la restriction de G à l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

Donner le tableau de variation de G_1 sans préciser les valeurs des extremums et en déduire que, sur $\left] \frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2} \right[$, G_1 admet un zéro.