

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Étranger groupe 1¹ juin 1969 ∞

EXERCICE 1

1. z est un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ ; \bar{z} désigne le nombre conjugué de z .

Quel est le module et quel est l'argument de $z' = \frac{1}{\bar{z}}$?

Quelle est la transformation géométrique qui associe le point M image de z au point M' image de z' ?

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

On appelle A le point de coordonnées $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Dans l'inversion \mathcal{I} de centre O et de puissance 1, le point M d'affixe z a pour inverse M' d'affixe z' . Le point M' , s'il n'est pas en A , a pour inverse M'' dans l'inversion \mathcal{I}_1 de centre A et de puissance 1. Enfin, le point M'' a pour inverse M_1 d'affixe z_1 dans l'inversion \mathcal{J} .

Calculer z_1 en fonction de z . En déduire la nature de la transformation \mathcal{T} qui transforme M en M_1 :

$$\mathcal{T} = \mathcal{J} \circ \mathcal{I}_1 \circ \mathcal{I}.$$

Expliquer géométriquement.

EXERCICE 2

1. (O) et (C) sont deux cercles tangents extérieurement. Du centre O de (O) on trace une tangente à (C); soit T le point de contact de cette tangente et de (C).

Démontrer que la puissance de T par rapport à (O) est égale au double du produit des rayons des deux cercles.

2. Sur la droite OT on désigne par O' un point tel que T soit entre O et O' et l'on trace le cercle (O'), de centre O' , tel que (O') et (C) soient tangents extérieurement. Les données étant les points O et O' et les rayons, R et R' , de (O) et de (O'), à savoir

$$R = 1, \quad R' = 2, \quad OO' = 5,$$

on demande de déterminer le point T et le rayon de (C).

PROBLÈME

Soit f la fonction qui, à la variable réelle x , fait correspondre le réel

$$y = f(x) = e^x (2x^2 - 3x),$$

où e est la base des logarithmes népériens.

1. Le groupe 1 comprend les centres du Bassin méditerranéen et de l'Afrique noire.

- Étudier le sens de variation de cette fonction et en tracer la courbe représentative, (C) , par rapport à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.
[On précisera, en particulier, les limites de y quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$ et l'on déterminera la tangente à (C) à l'origine.]
- Calculer les dérivées première et seconde, $y' = f'(x)$ et $y'' = f''(x)$, de la fonction $f(x)$ et vérifier que $y = f(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 4e^x.$$

En déduire que $4e^x + 2y - y'$ est une primitive de y .

Évaluer l'aire arithmétique $S(a)$ limitée par la courbe (C) , l'axe $x'Ox$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$, où a est un nombre réel négatif.

Démontrer que $S(a)$ a une limite, ℓ , que l'on évaluera, lorsque a tend vers $-\infty$.

- Soit $f^{(n)}(x)$ la dérivée d'ordre n de f . Démontrer que, quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 1, on a

$$f^{(n)}(x) = e^x (2x^2 + a_n x + b_n),$$

où a_n et b_n sont des entiers relatifs, fonctions de n .

Établir les relations

$$a_{n+1} = a_n + 4 \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n + a_n.$$

Calculer a_n et b_n en fonction de n .

- Démontrer que, quel que soit n , l'équation

$$2x^2 + a_n x + b_n = 0$$

a deux racines réelles et distinctes.

On se propose de trouver toutes les valeurs de n entières supérieures à 1 pour lesquelles ces racines sont des nombres rationnels.

À cet effet, on établira d'abord que ces valeurs de n sont telles que $16n + 9$ est le carré d'un nombre entier, p , et ensuite que le reste de la division de p par 8 est égal à 3 ou à 5. On en déduira la forme générale des entiers n cherchés et l'on donnera toutes les valeurs de n inférieures à 30.