

♣ Baccalauréat C Étranger groupe I¹ juin 1971 ♣

EXERCICE 1

1. Déterminer toutes les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles $\frac{n^2 - 9}{n - 5n + 4}$ est un entier relatif (positif, négatif ou nul).
2. Quelle est la plus petite valeur, p , positive et entière telle que, quel que soit le réel x supérieur ou égal à p , on ait

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 4} < 2 ?$$

EXERCICE 2

1. n désignant un entier naturel, résoudre l'équation

$$(E) \quad u^n = (-1)^n,$$

dans le corps \mathbb{C} des complexes.

On distinguera deux cas, suivant la parité de n et l'on déterminera le module et l'argument de chacune des racines de l'équation.

2. Dans le cas où n est pair, on désigne par u_k l'une quelconque des racines de l'équation (E).

La relation $z' = u_k z$ établit une application T_k de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . Démontrer que l'ensemble de ces applications, muni de l'opération composition des applications, a une structure de groupe commutatif.

PROBLÈME

On se propose de chercher comment il faut choisir les nombres réels a , b et c pour que l'expression

$$\frac{ax^2 + b\sqrt{2}x + c}{x^2 + 1}$$

soit, en valeur absolue, inférieure ou égale à 1, quelle que soit la valeur du nombre réel x ,

$$(\mathcal{C}) \quad \left| \frac{ax^2 + b\sqrt{2}x + c}{x^2 + 1} \right| \leq 1$$

1. Démontrer qu'il est nécessaire pour que la condition (\mathcal{C}) soit réalisée que l'on ait

$$|a| \leq 1 \quad \text{et} \quad |c| \leq 1.$$

1. Centres du Bassin méditerranéen et de l'Afrique Noire.

2. a. On suppose que l'on a $a = 1$; quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes à imposer à b et à c ?

Même question lorsque l'on a $a = -1$.

- b. On suppose maintenant que l'on a

$$-1 < a < +1 \quad (\text{inégalités strictes});$$

démontrer qu'il est *nécessaire* que l'on ait

$$b^2 + 2a^2 \leq 2.$$

3. a. En supposant $b^2 + 2a^2 = 2$ et $-1 < a < 1$, démontrer que, par rapport à un repère cartésien orthonormé d'axes Ox , Oy et Oz , le point P de coordonnées $(a; b; c)$ décrit un cercle (Γ) , dont on donnera l'équation du plan, les coordonnées du centre et la valeur du rayon.

- b. *Application numérique* :

$$a = \cos \varphi, \quad b = \sqrt{2} \sin \varphi, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

Construire la courbe représentative, en repère orthonormé, de la fonction f , de la variable réelle x , définie par

$$f(x) = y = \frac{(x^2 - 1) \cos \varphi + 2x \sin \varphi}{x^2 + 1}.$$

Préciser les coordonnées des points de cette courbe où la tangente est parallèle à l'axe $x'x$.

4. On suppose enfin que l'on a

$$-1 < a < 1 \quad \text{et} \quad b^2 + 2a^2 < 2 \quad (\text{inégalités strictes}).$$

On appelle toujours P le point de coordonnées $(a; b; c)$ dans un repère cartésien orthonormé et, bien sûr, on cherche à satisfaire la condition (\mathcal{C}) .

Démontrer que le point P appartient soit à la surface soit à l'intérieur du cône (Σ) de révolution dont le sommet est $A(1; 0; 1)$, l'axe AO , le demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$ et qu'il appartient aussi soit à la surface, soit à l'intérieur du cône (Σ') symétrique de (Σ) par rapport à O .