

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Centres étrangers groupe 1 juin 1982 ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Dans \mathbb{Q} , résoudre le système à l'inconnue (x, y, z) :

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -1 \\ 3x + y - 2z = 2. \end{cases}$$

2. Dans le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, dont les éléments sont notés $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$, résoudre le système à l'inconnue (x, y, z) :

$$\begin{cases} x + \bar{2}y - \bar{4}z = -\bar{1} \\ \bar{3}x + y - \bar{2}z = \bar{2}. \end{cases}$$

EXERCICE 2

4 points

On donne un plan affine euclidien orienté \mathcal{P} dont le plan vectoriel associé est noté P , un triangle $A_1A_2A_3$ de \mathcal{P} et une similitude \mathcal{S} de P . On note $B_1B_2B_3$ le triangle de \mathcal{P} défini par

$$\overrightarrow{A_2B_1} = \mathcal{S}(\overrightarrow{A_2A_3}), \quad \overrightarrow{A_3B_2} = \mathcal{S}(\overrightarrow{A_3A_1}), \quad \overrightarrow{A_1B_3} = \mathcal{S}(\overrightarrow{A_1A_2}).$$

1. On désigne par G l'isobarycentre du triangle $A_1A_2A_3$ (barycentre des sommets affectés de coefficients égaux). Montrer que G est aussi l'isobarycentre du triangle $B_1B_2B_3$.
2. On rapporte le plan \mathcal{P} à un repère orthonormal direct d'origine G . On appelle a_1, a_2, a_3 les affixes de $A_1A_2A_3$ et b_1, b_2, b_3 les affixes de B_1, B_2, B_3 . On désignera par s le nombre complexe associé à la similitude \mathcal{S} c'est-à-dire que, si z est le nombre complexe associé à un vecteur \vec{v} de P et z' le nombre complexe associé au vecteur \vec{v}' transformé de v par \mathcal{S} , on a $z' = sz$.

Montrer qu'il existe, en général, deux similitudes \mathcal{S} telles que le triangle $B_1B_2B_3$ soit équilatéral et que celles-ci sont indépendantes du choix du triangle $A_1A_2A_3$.

Quel est le cas d'exception ?

N. B. - On utilisera le nombre complexe j de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

PROBLÈME

12 points

Partie préliminaire

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale

$$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx.$$

2. Montrer que chacune des cinq fonctions numériques :

$$x \longmapsto x - \sin x$$

$$x \longmapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$

$$x \longmapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$

$$x \longmapsto 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x$$

$$x \longmapsto x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \sin x$$

ne prend que des valeurs positives (au sens large) sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3. Montrer que, pour $x \in]0; \frac{\pi}{3}[$,

$$g(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

vérifie

$$\frac{1}{6} \left(1 - \frac{x^2}{20} \right) \leq g(x) \leq \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6}}.$$

Partie A

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une application continue f_n de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ dans \mathbb{R} vérifiant

$$f_n(0) = n, \quad f_n(x) = \frac{\sin \pi x}{\sin x} \quad \text{pour tout } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Montrer que l'application f_n est dérivable et calculer $f'_n(0)$.

On utilisera les résultats de la partie préliminaire 2.

2. Pour $n \geq 1$, on désigne par C_n la représentation graphique de f_n par rapport à un repère orthonormal donné (unité graphique : 2 cm). Déterminer les abscisses des points communs à C_n et C_{n+1} . Construire C_1, C_2, C_3 .

Interpréter en terme d'aire l'intégrale

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} f_n(x) dx. \quad (n \geq 2)$$

3. On note $\omega = \int_0^{\pi} \varphi(t) dt$ où φ est l'application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(t) = \frac{\sin t}{t} \quad \text{si } t \neq 0.$$

On admettra que l'intégrale ω , que l'on ne cherchera pas à calculer, s'écrit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\omega = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi_n(x) dx$$

où la fonction continue φ_n est définie par

$$\varphi_n(0) = n, \quad \varphi_n(x) = \frac{\sin nx}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

Pour $n \geq 2$, justifier l'égalité

$$A_n - \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \cdot g(x) dx.$$

En déduire

$$\frac{\pi}{6n^2} \left(1 - \frac{\pi^2}{20n^2}\right) \leq A_n - \omega \leq \frac{\pi}{6n^2} \frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{6n^2}}.$$

Trouver les limites des suites $(A_n)_{n \geq 2}$ et $(n^2(A_n - \omega))_{n > 2}$.

Partie B

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

1. Calculer I_0, I_1, I_2 .
2. Exprimer $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n et en déduire une expression de I_n ne faisant intervenir aucun symbole d'intégration.

N. B. - On rappelle la formule

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}.$$