

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Centres étrangers groupe 1 bis juin 1982 ∞

EXERCICE 1

4 points

Démontrer que, si un entier naturel premier p est tel que la somme de tous les diviseurs de p^4 est le carré d'un entier naturel n , alors

$$2p^2 + p < 2n < 2p^2 + p + 2.$$

En déduire l'existence et l'unicité de p ainsi que le calcul du couple (p, n) .

EXERCICE 2

4 points

Dans un plan affine euclidien orienté, une similitude directe \mathcal{S}_O de centre O transforme un couple donné (A, B) de points distincts, autres que O, en un couple (A', B').

La similitude directe \mathcal{S}_A de centre A qui transforme B en B', transforme O en P. La similitude directe \mathcal{S}_B de centre B qui transforme A en A', transforme O en Q.

Démontrer que O est le milieu de (P, Q).

PROBLÈME

12 points

On donne les deux applications numériques

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -1 + \sqrt{1+x^2} \text{ et}$$
$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{1+|x|}$$

1. Démontrer que f et φ sont paires, continues et dérivables.

Étudier $f(x)$ et $\varphi(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que les courbes représentatives \mathcal{C} de f et Γ de φ rapportées au repère orthonormé direct \mathcal{R} (unité : 2 cm) admettent pour asymptotes deux droites ayant respectivement pour équation

$$y = x - 1 \text{ et } y = -x - 1.$$

Étudier les variations de f et de φ .

2. Démontrer que, quel que soit x réel,

$$1 + |x| \leq 1 + \sqrt{1+x^2} \text{ et } f(x) \leq \varphi(x).$$

En déduire la position relative de \mathcal{C} et Γ que l'on construira en plaçant les points d'abscisses 1, 2, 3, 4 notamment, points dont les ordonnées seront calculées à 0,1 près par excès. Justifier la position de \mathcal{C} et Γ par rapport à leurs asymptotes communes.

3. Démontrer que l'application numérique

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

est paire, continue et dérivable et que l'application numérique

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \text{Log}(x + \sqrt{1+x^2})$$

est l'une de ses primitives.

(Log désigne le logarithme népérien).

Démontrer par une intégration par parties que

$$\int_0^x \sqrt{1+u^2} \, du = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\text{Log}(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Calculer en cm^2 l'aire \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} ensemble des points M dont les couples de coordonnées $(x; y)$ sont tels que

$$0 \leq x \leq 4 \quad \text{et} \quad f(x) \leq y \leq \varphi(x).$$

Calculer la valeur numérique de \mathcal{A} à 0,01 près par défaut.

4. Soit \mathcal{C}_α le cercle passant par O origine de \mathcal{R} et centré en I dont le couple de coordonnées est $(0, \alpha)$ avec $\alpha > 0$.

Former l'équation aux *ordonnées* des points communs à C et \mathcal{C}_α . Montrer que ces deux courbes ont deux points communs A et A' autres que O si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Dans la suite $a(\alpha)$ désigne la valeur absolue commune des abscisses de A et A'.

Démontrer que la droite AA' coupe le segment [OI].

Pour quelle valeur α_1 de α , A, A' et O sont-ils confondus?

Démontrer que α_1 est la limite de $\frac{x^2}{2f(x)}$ quand x tend vers zéro.

Calculer l'ordonnée $q(x)$ du point Q d'abscisse x de l'arc $\widehat{AOA'}$ de \mathcal{C}_α . Démontrer que

$$|x| \leq a(\alpha) \Rightarrow f(x) \geq q(x).$$

En déduire la position relative des arcs $\widehat{AOA'}$ de C et \mathcal{C}_α .