

## ∞ Baccalauréat C Étranger groupe I<sup>1</sup> septembre 1972 ∞

### EXERCICE 1

Dans l'espace affine euclidien orienté  $\mathcal{E}$  de dimension trois, on désigne par  $\mathcal{T}$  la translation de vecteur  $\vec{V}$ , non nul, par  $\Delta$  un déplacement quelconque, par  $\circ$  la loi de composition des transformations ponctuelles.

Démontrer qu'une condition, nécessaire et suffisante, pour que l'on ait

$\Delta = \mathcal{T} \circ \Delta \circ \mathcal{T}$ , est que  $\Delta$  soit un déplacement hélicoïdal d'angle  $\pi$  et d'axe orthogonal à  $\vec{V}$ .

### EXERCICE 2

Le plan affine euclidien orienté  $\mathcal{P}$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On note  $M(z)$

le point  $M$ , image du nombre complexe  $z$ , les nombres  $j$  et  $j^2$  étant les nombres complexes  $\cos \frac{2\pi}{3} +$

$i \sin \frac{2\pi}{3}$  et  $\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$ .

Aux trois points  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $C(c)$  on associe les nombres

$$u = a + bj + cj^2 \quad \text{et} \quad v = a + bj^2 + cj.$$

De même, aux trois points  $A'(a')$ ,  $B'(b')$  et  $C'(c')$  sont associés

$$u' = a' + b'j + c'j^2 \quad \text{et} \quad v' = a' + b'j^2 + c'j.$$

1. Montrer que  $u$  reste invariant quand on change l'origine du repère, la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  étant conservée.
2. Montrer qu'une condition, nécessaire et suffisante, d'existence d'une similitude directe, dans laquelle  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont respectivement les images de  $A$ ,  $B$  et  $C$ , s'écrit

$$uv' - vu' = 0.$$

### PROBLÈME

L'entier naturel  $n$  étant au moins égal à 1, on note  $g_n$  la fonction qui, à tout réel  $x$  strictement supérieur à  $n$ , associe

$$g_n(x) = (x-n)\text{Log } x - x\text{Log } (x-n),$$

où  $\text{Log}$  désigne le logarithme népérien.

1. Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation  $(x+1)^2 < 2x^2$ .  
En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que l'inégalité  $p^2 < 2p$  est vérifiée pour toute valeur de l'entier naturel  $p$  supérieure ou égale à 5.  
Déterminer les signes de  $g_n(n+1)$  et de  $g_n(n+2)$  selon les valeurs de  $n$ .
2. Calculer les dérivées première et seconde,  $g'_n(x)$  et  $g''_n(x)$ , de  $g_n(x)$  par rapport à la variable  $x$ . En déduire le sens de variation de  $g'_n$  et le signe de  $g''_n(x)$ , puis le sens de variation de  $g_n$ .

---

1. Centres du Bassin méditerranéen et de l'Afrique Noire.

3. Trouver les limites de  $g_n(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $n$  et lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .  
Il pourra être commode d'écrire

$$g_n(x) = -n \operatorname{Log} x - x \operatorname{Log} \left(1 - \frac{n}{x}\right).$$

Tracer la courbe représentative de la fonction  $g_n$  dans un repère orthonormé.

4. Démontrer que l'équation  $g_n(x) = 0$  a une racine, et une seule, notée  $x_n$  et que  $x_n - n$  tend vers 1, lorsque l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Quelle est la limite dans les mêmes conditions de  $x_{n+1} - x_n$  ?

5. Calculer l'intégrale

$$F(a) = \int_a^{x_2} g_2(x) \, dx, \quad \text{pour } a \in ]2; x_2],$$

et trouver la limite de  $F(a)$ , lorsque  $a$  tend vers 2.