

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Étranger groupe Ibis septembre 1975 ∞

EXERCICE 1

On considère l'intégrale

$$I = \int_1^e (\text{Log } x)^n dx$$

dans laquelle n désigne un entier naturel, e la base des logarithmes népériens et $\text{Log } x$ le logarithme népérien de x .

1. Pour tout x réel de l'intervalle $[1 ; e]$, comparer

$$(\text{Log } x)^{n-1} \quad \text{et} \quad (\text{Log } x)^n.$$

Montrer que la suite de terme général I_n est décroissante et minorée.

2. En utilisant une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre I_{n-1} et I_n .

Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3 .

EXERCICE 2

Dans un plan affine rapporté à un repère cartésien donné, on note $M(x ; y)$ le point de coordonnées x et y .

Soit les points $A(-1 ; 1)$, $B(1 ; -1)$, $C(1 ; 1)$.

Déterminer le couple $(x ; y)$ pour que $M(x ; y)$ soit le barycentre de A affecté du coefficient x , B affecté du coefficient y et C affecté du coefficient 1.

PROBLÈME

N. B. : Toutes les courbes seront tracées dans un plan (\mathcal{P}) orienté rapporté à un repère orthonormé d'axes $(x'Ox, y'Oy)$.

1. On considère la fonction f de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} définie par :

$$x \longmapsto f(x) = x + 1 - \frac{5}{2}\sqrt{x}.$$

- a. Étudier les variations de la fonction f . Construire la courbe représentative (C_1) des variations de cette fonction.
- b. Déterminer les points communs à (C_1) et aux axes de coordonnées.
- c. Déterminer l'aire du domaine (\mathcal{D}) , ensemble des points $\mu(x ; y)$ tels que :

$$\frac{1}{4} \leq x \leq 4 \quad \text{et} \quad f(x) \leq y \leq 0.$$

2. a. On désigne par (C) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan (\mathcal{P}) dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$4y^2 - 8xy + 4x^2 - 8y - 17x + 4 = 0 \quad (1)$$

Montrer que (C_1) est une partie de (C) . Construire (C) .

- b. On désigne par (Γ) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan (\mathcal{P}) dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$4y^2 + 8xy + 4x^2 + 8y - 17x + 4 = 0 \quad (2)$$

Construire (Γ) .

3. Dans le plan complexe (\mathcal{P}) , le point $M(x; y)$ a pour affixe z tel que $z = x + iy$. On désigne par \bar{z} le nombre complexe conjugué de z ($z = x - iy$).

On rappelle que i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

- a. Exprimer, en fonction de z et de \bar{z} , les nombres réels suivants :

$$x ; y ; x^2 + y^2 ; xy.$$

- b. En déduire une relation nécessaire et suffisante, que vérifient z et \bar{z} , pour que le point M d'affixe z appartienne à (C) .

- c. Soit le point $N(X; Y)$ d'affixe Z , tel que $Z = X + iY$, transformé du point M dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Exprimer Z en fonction de z .

Trouver une relation nécessaire et suffisante que vérifient Z et \bar{Z} pour que N appartienne à la courbe (P) transformée de la courbe (C) dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

En déduire l'équation de la courbe (P) et la nature de la courbe (C) .

4. On désigne par (C_λ) l'ensemble des points $Q(x; y)$ du plan (\mathcal{P}) dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$4y^2 - 8xy + 4x^2 - 8y + \lambda x + 4 = 0 \quad (3)$$

dans laquelle λ désigne un paramètre réel.

- a. En utilisant la relation (3) exprimer y en fonction de x .
- b. Montrer que pour $\lambda = 8$, (C_λ) est une droite dont on donnera l'équation. Dans toute la suite du problème, on supposera : $\lambda \neq 8$.
- c. Montrer que, pour une valeur quelconque de λ différente de 8, la courbe (C_λ) est située dans un demi-plan de frontière $y'Oy$; préciser lequel.
Montrer que les courbes (C_λ) passent par un point fixe.
- d. Montrer que les courbes (C_λ) sont des paraboles.