

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Étranger groupe I septembre 1985 ∞

EXERCICE 1

5 points

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A, et G l'isobarycentre des points A, B, C.

1. Soit  $G'$  le symétrique de G par rapport à la droite (BC).  
Déterminer des nombres réels  $b$  et  $c$  pour que  $G'$  soit le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 1,  $b$ ,  $c$ ?
2. Déterminer l'ensemble E des points  $M$  du plan tels que

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

Vérifier que les points B et C appartiennent à E.

EXERCICE 2

6 points

On se propose d'étudier le comportement lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  de la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par la relation :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} + \dots + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}.$$

1. Justifier l'encadrement, valable pour  $n \geq 1$ .

$$\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{3}}} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}.$$

2. En déduire l'encadrement :

$$\int_1^n \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx \leq S_n \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx.$$

Prouver que  $\frac{S_n}{n^{\frac{2}{3}}}$  admet une limite finie  $a$  que l'on déterminera.

3. On pose  $u_n = S_n - an^{\frac{2}{3}}$ .  
En utilisant les encadrements précédents, montrer que la suite  $(u_n)$  est bornée et décroissante.  
Prouver enfin que cette suite est convergente.

PROBLÈME

9 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit  $f$  la fonction qui, à tout nombre réel  $x$  différent de  $-2$  associe

$$f(x) = \frac{x}{2+x}$$

et  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un plan  $P$  rapporté à un repère orthonormal (unité : 1 cm).

1. Déterminer des nombres réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout nombre réel  $x$  différent de  $-2$

$$f(x) = a + \frac{b}{2+x}$$

2. En déduire la nature géométrique de  $\mathcal{C}$ , préciser ses éléments de symétrie et construire  $\mathcal{C}$ .
3. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = -4$  et  $x = -3$ .
4. On appelle  $A, B, O'$ , les points de coordonnées respectives  $(-1; -1)$ ,  $(-4; 2)$ ,  $(-3; 3)$ .

Évaluer l'aire  $S$  du domaine  $OABO'$  délimité par les droite  $(OO')$ ,  $(AB)$  et par  $\mathcal{C}$ .

### Partie B

À tout nombre complexe  $z$  différent de  $-2$ , on associe

$$z' = \frac{z}{2+z}.$$

1. Montrer que cette application est une bijection de  $\mathbb{C} - \{-2\}$  sur un ensemble  $E$  que l'on précisera.
2. Soit  $A$  le point d'affixe  $-2$  et  $F$  l'application qui à tout point  $M$  d'affixe  $z = x + iy$  distinct de  $A$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = x' + iy'$ .
- Calculer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
  - Déterminer l'ensemble des points  $M$  pour lesquels  $z'$  est réel.
  - Déterminer l'ensemble des points  $M$  pour lesquels la partie réelle  $x'$  de  $z'$  est nulle.
3.
  - Quelle relation y a-t-il entre les modules et les arguments de  $z' - 1$  et  $z + 2$ ?
  - Déterminer l'image  $\mathcal{C}'$  par  $F$  du cercle  $\mathcal{C}_r$  de centre  $A$  et de rayon  $r$ , où  $r > 0$ .
  - Déterminer l'image  $D'_\alpha$  par  $F$  de la droite  $D_\alpha$  passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ , privée de  $A$ .
  - Dessiner sur une même figure les cercles  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  et les droites  $D_0, D_{\frac{\pi}{4}}, D_{\frac{\pi}{2}}, D_{\frac{3\pi}{4}}$ .  
Dessiner sur une autre figure les transformées par  $F$  de ces cercles et de ces droites.