Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1975 Étranger groupe I

EXERCICE 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{tg}\ 4x + \text{tg}\ x = 0$, x étant l'inconnue.
2. Donner l'expression de $\text{tg}\ 2x$ en fonction de $\text{tg}\ x$, puis celle de $\text{tg}\ 4x$ en fonction de $\text{tg}\ x$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $y^4 - 10y^2 + 5 = 0$.
4. En utilisant les trois questions précédentes donner des valeurs numériques approchées de $\text{tg}\left(k\dfrac{\pi}{5}\right)$, pour $k = 1, 2, 3, 4$.
   (Le candidat indiquera éventuellement l'instrument - règle ou table - qu'il a utilisé pour faire le calcul demandé.)

EXERCICE 2

1. Donner une définition de la fonction logarithme népérien.
2. Montrer que, quels que soient les réels a et b tels que $0 < a < b$, on a
$$\frac{1}{b}(b-a) < \int_0^b \frac{1}{t}\,\text{d}t < \frac{1}{a}(b-a).$$
3. Montrer que pour tout entier strictement positif n on a :
$$\frac{1}{n+1} < \text{Log}\ (n+1) - \text{Log}\ < \frac{1}{n}.$$
   (Le symbole Log désigne le logarithme népérien.)
4. Déduire de ce qui précède que
$$\text{Log}\ (n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$
5. Donner une valeur de n pour laquelle
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > 10.$$

PROBLÈME

Soit un plan affine P rapporté au repère $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$; on considère l'application T de P dans P qui à chaque point $M(x\,;\ y)$ fait correspondre le point $M'\left(x'\,;\ y'\right)$ par les relations :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & a + \alpha x + \beta y \\ y' & = & b + \gamma x + \delta y \end{array}\right.$$

où a, b, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels.

Première partie

1. Montrer que l'application T est définie par la donnée des images des trois points O(0; 0), A(1 ; 0) et B(0; 1).
2. On considère le point C(c; d) et on donne les images par T des trois points O, A et C. Peut-on ainsi définir T quel que soit le point C choisi dans le plan ?
3. À quelle condition la donnée de trois points du plan et de leurs images définit-elle une application affine de ce plan dans lui-même ?
   Pouvait-on le prévoir ?

Deuxième partie

1. Écrire la condition pour que T ait un point invariant et un seul.
   Écrire les conditions pour que T ait une droite de points invariants.
2. **a.** On donne les images $\text{O}'(m\ ;\ n)$, $\text{A}'(2\ ;\ 3)$ et $\text{B}'(2\ ;\ 5)$ des trois points O, A, B.
   Discuter suivant la position du point O$'$ dans le plan le nombre de points invariants de l'application T ainsi définie.
   b. Répondre à la même question lorsque, A$'$ restant inchangé, on prend le point B$'$ de coordonnées (2; 7).
   Montrer que, dans ce cas-là, si O$'$ décrit une droite Ω l'application T admet une droite Δ de points invariants et que cette droite Δ passe par un point fixe ω lorsque O$'$ décrit Ω.

Troisième partie

Plus généralement on choisit $\text{O}'(m\ ;\ n)$, $\text{A}'(2\ ;\ 3)$ et $\text{B}'(p\ ;\ q)$ comme images de O, A et B.

1. Écrire la condition liant les coordonnées de O$'$ et B$'$ pour que T n'ait pas un point double unique.
2. Cette condition étant réalisée, montrer que O$'$ doit être choisi sur une droite fixe Ω si l'on veut que T possède une droite Δ de points invariants.
3. O$'$ étant choisi sur Ω montrer que B$'$ doit être pris sur une droite D parallèle à Ω pour que T ait une droite Δ de points invariants.
   Le point O$'$ peut-il être pris quelconque sur Ω ?
4. Une droite quelconque du plan peut-elle être une droite Δ pour un choix convenable de O$'$ et de B$'$?