

∞ Baccalauréat C Étranger groupe I juin 1984 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Déterminer la solution f de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 2y = 0,$$

sachant que :

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f'(0) = 0.$$

EXERCICE 2

4 POINTS

On se propose d'étudier la suite u , de terme général u_n , définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}.$$

1. Soit f l'application de l'intervalle $[0; 1]$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{x+2}.$$

- a. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$.
- b. Étudier le sens de variation de f . Quelle est l'image du segment $[0; 1]$ par f ?
- c. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$,

$$\frac{1}{4} \leq f'(x) < \frac{2}{3}.$$

- d. Établir que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0; 1]$.
2. a. Prouver que si la suite u admet une limite ℓ , alors $f(\ell) = \ell$.
- b. En utilisant le 1. c., démontrer que, pour tout entier n :

$$0 \leq \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \leq \frac{2}{3}.$$

En déduire que la suite u converge vers ℓ et déterminer un entier n_0 tel que si $n > n_0$, alors $|u_n - \ell| < 10^{-3}$.

PROBLÈME

12 POINTS

Soit, dans le plan affine euclidien, un triangle $A_1 A_2 A_3$.

À tout point M du plan, distinct des sommets A_1, A_2, A_3 , du triangle, on associe :

- les points M_1, M_2, M_3 , symétriques de M dans les symétries orthogonales $s_{(A_2 A_3)}, s_{(A_3 A_1)}, s_{(A_1 A_2)}$ d'axes respectifs les droites $(A_2 A_3), (A_3 A_1), (A_1 A_2)$.

— Les droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ issues des sommets A_1, A_2, A_3 et respectivement perpendiculaires aux droites $(M_2M_3), (M_3M_1), (M_1M_2)$. Les symétries orthogonales d'axes $\Delta_i, i \in [1; 3]$, sont notées s_i .

1. Démontrer que Δ_1 est la médiatrice du segment $[M_2M_3]$.
2. Soit $s = s_{(A_1A_2)} \circ s_{\Delta_1} \circ s_{(A_1A_3)}$.
 - a. Quelle est la nature de s ?
 - b. Déterminer $s(A_1), s(M)$. Caractériser s .
 - c. Démontrer l'égalité entre mesures d'angles orientés de droites :

$$(\widehat{A_1A_2, A_1M}) = (\widehat{\Delta_1, A_1A_2}) \quad [\pi] \quad (1)$$

3. Établir de manière analogue,

$$(\widehat{A_2A_1, A_2M}) = (\widehat{\Delta_2, A_2A_3}) \quad [\pi] \quad (2)$$

$$(\widehat{A_3A_2, A_3M}) = (\widehat{\Delta_3, A_3A_1}) \quad [\pi] \quad (3)$$

4. Montrer que l'ensemble (C) des points M du plan, distincts des sommets A_1, A_2, A_3 tels que les points M_1, M_2, M_3 soient alignés est contenu dans le cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$.
5. On suppose dans cette question, que le point M n'appartient pas à (C) .
 - a. Démontrer que les droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sont concourantes en un point P que l'on caractérisera pour le triangle $M_1M_2M_3$.
Dans la suite du problème ce point P est appelé l'associé du point M .
 - b. Quel est l'associé d'un point M appartenant aux côtés du triangle $A_1A_2A_3$ et distinct des sommets de ce triangle?
 - c. On suppose que le point M n'appartient pas aux supports des côtés du triangle $A_1A_2A_3$. Démontrer, en utilisant les relations (1), (2), (3), que si M a pour associé P alors le point P a pour associé M .