Baccalauréat mathématiques élémentaires
Centres étrangers[1] septembre 1963

EXERCICE 1

Déterminer les fonctions y de la variable x, une fois dérivables, qui vérifient l'équation

$$y' + 2y = 0,$$

y' désignant la fonction dérivée de la fonction y.

EXERCICE 2

Le plan de la figure est rapporté à un repère orthonormé, $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$; l'unité de longueur est le centimètre. Soit $\mathscr{I}$ l'inversion de pôle O et de puissance 9.

1. L'énoncé notera (Γ) tout cercle qui coupe $x'\mathrm{O}x$ en deux points, M et M', qui soient inverses dans $\mathscr{I}$.

Montrer que tout cercle (Γ) est orthogonal à un cercle fixe, (O).

Un point quelconque du plan est-il le centre d'un cercle (Γ) ? Discuter.

Un cercle étant représenté par son équation,

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + p = 0,$$

quelles conditions doivent vérifier les coefficients pour qu'il soit un cercle (Γ) ? On appelle $\mathscr{S}$ l'ensemble des cercles (Γ) ; la suite du problème a pour objet l'étude de certains ensembles de $\mathscr{S}$.

2. Soit (Γ_1) de centre γ_1 tout cercle (Γ) dont le centre appartient à une droite fixe, (D_1) non perpendiculaire à $x'\mathrm{O}x$.

Montrer que le cercle (Γ_1) appartient à un faisceau linéaire $\mathscr{F}$, de cercles.

Discuter la nature du faisceau $\mathscr{F}$ suivant la position de la droite (D_1) par rapport au cercle (O).

Déterminer les points limites, ou les points de base, du faisceau $\mathscr{F}$.

Inversement, tout cercle du faisceau $\mathscr{F}$ est-il un cercle (Γ_1) ? En déduire l'ensemble des points γ_1.

3. Soit (Γ_2), de centre γ_2 tout cercle (Γ) tangent à une droite fixe, (D_2), d'équation $y = 1$.

Montrer, à l'aide de l'inversion $\mathscr{I}$, que le cercle (Γ_2) est aussi tangent à un cercle fixe, (C_2), dont on précisera le centre et le rayon.

Un cercle étant représenté par l'équation (1), écrire un système de conditions liant α, β, p pour qu'il soit un cercle (Γ_2). En déduire l'ensemble des points γ_2.

1. Athènes, Espagne, Israël, Istanbul, Liban, Maroc, Portugal, République d'Afrique centrale, Rome, Syrie, Tunisie

4. Soit (Γ_3), de centre γ_3, tout cercle (Γ) tangent à un cercle fixe (C_3), de rayon 1, dont le centre a pour coordonnées $(0\,;\,+2)$.

Montrer, à l'aide de l'inversion $\mathscr{I}$, que le cercle (Γ_3) est aussi tangent à un cercle fixe, $\left(C_3'\right)$, dont on précisera le centre et le rayon.

Un cercle étant représenté par l'équation (1), écrire un système de conditions liant α, β, p pour qu'il soit un cercle (Γ_3).

En déduire l'ensemble des points γ_3. On pourra faire une translation du repère, portant l'origine au point de coordonnées $(0\,;\,+4)$.

N. B. - Après la question 1, les questions 2, 3, 4 peuvent être traitées dans un ordre arbitraire. Les figures seront faites avec soin; l'unité de longueur est imposée : le centimètre.