

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Étranger groupe 1¹ ∞
septembre 1968

EXERCICE 1

Les nombres en question sont des entiers naturels différents de 1.

Montrer que :

- si deux nombres ne sont pas premiers entre eux, l'un au moins de leurs diviseurs communs est premier;
- si deux nombres sont premiers entre eux, tout nombre premier qui divise leur produit divise l'un et est premier avec l'autre;
- si deux nombres sont premiers entre eux, leur somme et leur produit sont aussi deux nombres premiers entre eux.
- Calculer deux nombres, connaissant leur somme, 135, et leur plus petit multiple commun, 504.

EXERCICE 2

On donne dans un plan P trois points A, B et C dans P.

1. Démontrer que, quel que soit le point M dans P, ou hors de P, la somme des produits scalaires $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB}$ est nulle.
2. Trouver dans P un point M tel que les trois produits scalaires précédents soient égaux. Discuter.

EXERCICE 3

On considère l'ensemble E des équations du 4^e degré, à coefficients réels, de la forme

$$(1) \quad f(x) = x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2ax + 1 = 0.$$

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Après avoir divisé $f(x)$ par x^2 , poser

$$x + \frac{1}{x} = u$$

et montrer que la nouvelle inconnue u est racine de l'équation :

$$(2) \quad u^2 + 2au + b - 2 = 0.$$

En déduire que l'équation (1) a toujours quatre racines, réelles ou non, distinctes ou non.

1. Ce groupe 1 comprend les pays suivants : Algérie, Iles Comores, Cameroun sud, Italie, Turquie, Côte française des Somalis, Égypte, Éthiopie, Syrie, Liban, Grèce, Tunisie, Espagne et Portugal.

2. a. En revenant à la, forme initiale,

$$(1) \quad f(x) = x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2ax + 1 = 0,$$

montrer que, si l'équation (1) a une racine complexe, non réelle, x_0 , elle a aussi pour racine le nombre conjugué de x_0 et le nombre inverse de x_0 .

- b. En déduire qu'alors, si le module de x_0 est différent de 1, l'équation (1) a quatre racines complexes, dont on précisera la disposition des images dans le plan complexe. Une telle équation (1) sera dite du type I.
- c. Déterminer a et b , sachant que l'équation (1) admet pour racine le nombre $(2+i)$. Résoudre dans ce cas l'équation (1) et mettre $f(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes de la variable x à coefficients réels.
- d. Mêmes questions qu'au c, en supposant maintenant que l'équation (1) admet pour racine le nombre

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

ρ et θ étant deux réels tels que

$$\rho > 1, \quad 0 < \theta < \pi.$$

3. a. Montrer que, si l'équation (1) a une racine complexe, non réelle, de module 1, elle a ou bien trois autres racines de module 1 (type II), ou bien deux autres racines réelles et inverses (type III).
- b. Montrer que l'équation (1) peut avoir quatre racines réelles (type IV).
- c. Représenter, dans le plan complexe, les images des quatre racines de l'équation (1) pour chacun des types II, III et IV.
4. a. À chaque élément e de E on associe le point M de coordonnées $(a; b)$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé. M est appelé image de e . Discuter, suivant la position de M , le type de l'équation e .
- b. L'équation (1) étant du type I, trouver l'ensemble des points M tels qu'une racine de l'équation e associée ait un module donné ρ ($\rho > 1$).
- c. L'équation (1) étant du type III, les images dans le plan complexe de ses quatre racines peuvent-elles être cocycliques?