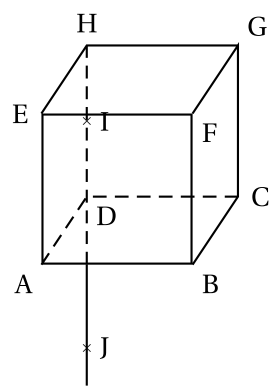
Baccalauréat C Étranger groupe I bis juin 1984

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Dans l'espace affine euclidien $\mathscr{E}$, on donne un cube ABCDEFGH. Soit I le milieu de l'arête [HD] et J le point tel que D soit le milieu du segment [JH].

1. Établir que le plan (ACI) est le plan médiateur du segment [FJ].
2. Une application affine $\mathscr{A}$ de l'espace $\mathscr{E}$ laisse les points A, C, I invariants et transforme F en J.
   Démontrer que si $\mathscr{A}$ est unique et est une isométrie que l'on caractérisera.



EXERCICE 2 **4 POINTS**

On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^3 - z^2 - (1+\mathrm{i})z - 2 + 2\mathrm{i} = 0.$$

1. Sachant que (E) admet une solution réelle, la déterminer puis résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$.
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$, les trois points dont les affixes respectives sont les trois solutions de l'équation (E) définissent un triangle : démontrer que ce triangle est rectangle et isocèle.

PROBLÈME **12 POINTS**

À tout entier naturel n non nul, on associe l'application f_n ainsi définie :

$$f_n : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R} \\ 0 & \longmapsto & 0 \\ x & \longmapsto & (1+x)^n \mathrm{e}^{(n+1)x} \text{ si } x < 0. \end{array}\right.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité de longueur : 4 cm).

Partie A

Dans cette première partie, l'entier naturel n prend les valeurs 1 et 2.

1. Étudier la dérivabilité de f_1 et f_2 au point O.
2. Étudier les variations de f_1 et f_2.
3. Quel est le développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 3 de la fonction exponentielle : $X \longmapsto \mathrm{e}^X$?

   En effectuant le changement de variables $X = \dfrac{1}{nx}$, justifier la propriété, pour tout réel x strictement négatif

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{nx}} = 1 + \frac{1}{nx} + \frac{1}{nx} + \frac{1}{2n^2x^2} + \frac{1}{6n^3x^3}\epsilon(x),$$

   où ϵ désigne une application définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \epsilon = 0$.

   a. Prouver l'existence d'un unique triplet (a, b, c) et d'un unique quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de réels tels que, sur $\mathbb{R}_-^\star$:

$$f_1(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\epsilon_1(x), \quad \lim_{x \to -\infty} \epsilon_1(x) = 0.$$

$$f_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma + \frac{\delta}{x} + \frac{1}{x}\epsilon_2(x), \quad \lim_{x \to -\infty} \epsilon_2(x) = 0.$$

   b. En déduire l'existence d'une droite asymptote $\mathcal{D}_1$ pour la courbe $\mathcal{C}_1$ et d'une parabole asymptote Γ_2 pour la courbe $\mathcal{C}_2$.

   On précisera les positions relatives des courbes asymptotes.
4. Tracer dans un repère, la courbe $\mathcal{C}_1$ puis, dans un autre repère, les courbes $\mathcal{C}_2$ et Γ_2.

Partie B

Dans cette deuxième partie, on revient au cas général.

1. Étudier la dérivabilité de f_n au point 0.
2. Étudier les variations de f_n et ébaucher la courbe représentative $\mathcal{C}_n$ de l'application f_n suivant la parité de n.
3. Chaque courbe $\mathcal{C}_n$ présente un sommet A_n d'abscisse $-\dfrac{1}{n+1}$; on note y_n l'ordonnée du point A_n.

   Les suites, de terme général $\ln y_n$ et y_n, sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leurs limites.
4. On désigne par u_n l'ordonnée du point de la courbe $\mathcal{C}_n$ d'abscisse $-\dfrac{1}{10}$.

   a. Donner une valeur approchée décimale à 10^{-3} près par défaut de u_1, u_2, u_3, u_4

   b. En étudiant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, établir que la suite de terme général u_n est décroissante à partir du rang n_0 que l'on précisera.

   c. Étudier la limite éventuelle de la suite de terme général u_n.