

∞ Baccalauréat C Étranger Groupe I bis juin 1981 ∞

EXERCICE 1

On se propose de résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation

$$(E) \quad 17x - 15y = 3.$$

1. Démontrer que, pour tout couple $(x ; y)$ solution de (E), x est multiple de 3.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation (E) puis la résoudre complètement.
3. Démontrer que si $(x ; y)$ est un couple solution, le plus grand commun diviseur de x et y est égal à l'un ou l'autre de deux entiers que l'on précisera. Déterminer tous les couples $(x ; y)$ solutions de (E) tels que x et y ne soient pas premiers entre eux.

EXERCICE 2

Soit \mathcal{P} un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Au point de \mathcal{P} , de coordonnées $(x ; y)$ on associe son affixe $x + iy$. On désigne par A le point d'affixe 1.

1. Déterminer, par leurs affixes b et c , deux points B et C de \mathcal{P} vérifiant les deux conditions :
 - a. O est barycentre de A, B, C affectés de coefficients égaux;
 - b. $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| = 2\|\vec{BC}\|$.
2. Sans refaire les calculs, indiquer par quelle transformation géométrique on passe des résultats obtenus à partir du point A, d'affixe 1, à ceux qu'on obtient à partir du point A', d'affixe a complexe quelconque.

PROBLÈME

1. a. Étudier et représenter graphiquement (par une courbe C) la fonction G de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$G(x) = \text{Log} \text{Log} |x|.$$

Log désignant le logarithme népérien.

- b. Montrer que la restriction g de G à l'intervalle $I =]1 ; +\infty[$ admet une application réciproque que l'on notera h . Expliciter l'image par h d'un réel x .
2. À tout réel k , on associe l'ensemble E_k des applications f de I dans \mathbb{R} qui vérifient la condition :

$$\forall x \in I, \quad f(x^2) = f(x) + k.$$

- a. Montrer que E_0 est un espace vectoriel réel.

- b.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'application $g_k = \frac{k}{\text{Log } 2} g$ est un élément de E_k .
- c.** Montrer que, pour k donné dans \mathbb{R} , E_k est l'ensemble des applications de la forme $g_k + \varphi$, avec $\varphi \in E_0$. De quelle structure peut-on munir l'ensemble E_k ?
- 3. a.** À toute application φ de I dans \mathbb{R} , on associe l'application $\psi = \varphi \circ h$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (h a été définie en 1. b).
Montrer que φ appartient à E_0 si, et seulement si, ψ admet $\text{Log } 2$ pour période.
On note P l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de période $\text{Log } 2$.
- b.** Montrer que E_k est l'ensemble des applications de I dans \mathbb{R} de la forme

$$\frac{k}{\text{Log}} g + \psi \circ g, \quad \text{avec } \psi \in P.$$

- 4.** On note θ l'application $t \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{\text{Log } 2} t\right)$, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ; on note u l'application $\theta \circ g$ de I dans \mathbb{R} .
- a.** Étudier et représenter graphiquement (courbe Γ) la restriction de u à l'intervalle $J = [\sqrt{e}; e]$; on donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près des réels $x \in J$ tels que $u(x)$ appartienne à $\{-1; 0; 1\}$.
- b.** Vérifier que u est un élément de E_0 .
Représenter graphiquement (courbe Γ') la restriction de u à l'intervalle

$$J' = \left[e^{\frac{1}{4}}; e^{\frac{1}{2}} \right].$$

(Unité : 4 cm.)