

Baccalauréat S Centres étrangers septembre 1997

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx.$$

1. Calculer u_1 .
2.
 - a. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$.
 - b. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $1 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1$.
 - c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$v_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} dx.$$

3.
 - a. En écrivant $\frac{nx^n}{1+x^n}$ sous la forme $\frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \times x$ montrer, à l'aide d'une intégration par parties que $v_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.
 - b. En utilisant l'inégalité vraie pour tout $t \geq 0$: $0 \leq \ln(1+t) \leq t$ (inégalité l'on ne demande pas de démontrer), montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \frac{1}{n+1}.$$

- c. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln 2$.
4.
 - a. Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$: $v_n + nu_n = n$.
 - b. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - u_n) = \ln 2$.

Exercice 2

5 points

Enseignement obligatoire

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle A et B les points d'affixes respectives -1 et 1 .

Soit M un point d'affixe z_M différente de 0. On appelle N le point d'affixe $\frac{1}{z_M}$.

1. Démontrer que : $AN = \frac{AM}{OM}$.
2. Dans toute la suite, on suppose que le point M appartient au cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$. On pose $z_M = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.
 - a. Démontrer que : $x^2 + y^2 = 2x + 1$.
 - b. Prouver que : $|z_M + 1|^2 = 2|z_M|^2$.
En déduire la longueur AM en fonction de OM.

3. En utilisant la question 1. calculer la longueur AN.

a. En utilisant le résultat de la question 2. a., démontrer que :

$$1 - \frac{1}{z_M} = \frac{1}{|z_M|^2} (z_M + 1).$$

b. En déduire que les vecteurs \overrightarrow{NB} et \overrightarrow{AM} sont colinéaires.

Lorsque M n'est pas sur la droite (AB), indiquer la nature du quadrilatère ANBM.

c. Démontrer que les normes des vecteurs \overrightarrow{NB} et \overrightarrow{AM} sont égales si et seulement si $|z_M| = 1$.

Préciser quelles sont alors les deux positions possibles du point M . Dans ces deux cas, montrer que le quadrilatère ANBM est un carré.

Exercice 2

11 points

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct et de centre O. M est un point du segment [AB], distinct de A et de B. On considère les carrés directs AMEF et MBGH de centres respectifs I et J. Les droites (AG) et (MH) se coupent en P.

1. Faire une figure en prenant $AB = 15$ cm et $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Cette figure complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2. Une propriété des points I, P, J.

On désigne par h l'homothétie de centre P qui transforme A en G.

a. Montrer que $h(M) = H$ et $h(E) = M$.

b. En déduire que l'image du carré AMEF est le carré GHMB.

c. Préciser $h(I)$. En déduire que les points I, P, J sont alignés.

On note Δ la droite passant par O et perpendiculaire à la droite (MH) en un point noté I.

On appelle U le milieu du segment [AB] et M' le point d'intersection des (ME) et (CD).

3. a. Montrer que $GM' = AH$

b. Montrer que $LJ = \frac{1}{2} GM'$ et $UJ = \frac{1}{2} AH$.

En déduire que $LJ = UJ$.

On démontrerait de même que $IL = IU$.

c. En déduire que la droite (IJ) est la médiatrice du segment [LU].

4. Justifier l'égalité $PU = PL$.

N.B. La fin de la quatrième question de l'exercice a été supprimée car hors grammaire désormais (elle traitait d'une conique définie par foyer et directrice).

Problème

5 points

Commun à tous les candidats

Le but du problème est l'étude et la représentation graphique de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Dans les parties A et B, on étudie des fonctions auxiliaires nécessaires à l'étude du signe de la dérivée de f .

Partie A

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{e^x}{x}$.

1.
 - a. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.
 - b. Donner le tableau de variations de h (on ne demande pas de construire la représentation graphique de h).
2. En remarquant que $h(2) > e$, montrer qu'il existe dans $]0; 1[$ un unique réel α tel que $h(\alpha) = h(2)$.
Vérifier que $0,40 < \alpha < 0,41$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = (2 - x)e^x - 2.$$

1.
 - a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
 - b. Dresser le tableau de variations de g en indiquant en particulier $g(0)$ (on ne demande pas de construire la représentation graphique de g).
2. En déduire l'existence d'un unique réel β non nul tel que $g(\beta) = 0$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x .
4. Recherche d'un encadrement de β .
 - a. Montrer que $1 < \beta < 2$.
 - b. Montrer que $h(2 - \beta) = h(2)$, où h est la fonction définie dans la partie A.
 - c. En déduire que $\beta = 2 - \alpha$ et donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} .

Partie C

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

1. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser la tangente au point d'abscisse 0.
2.
 - a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b. Vérifier que, pour tout $x \neq 0$, on a $f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

3. Pour tout $x \neq 0$, montrer que $f'(x) = \frac{x}{(e^x - 1)^2} g(x)$. (g est la fonction définie à la partie B)

4. Dresser alors le tableau de variations de f .

Dans ce qui suit, on note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto -x^2$.

5. a. Calculer $f(x) + x^2$.

b. En déduire la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C} .

c. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x^2) = 0$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

6. Tracer sur le même graphique les courbes \mathcal{C} , \mathcal{C}_f et la droite (T) tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.