∽ Baccalauréat STI F11 F11′ Métropole juin 2002 ∽

Calculatrice autorisée

Durée : 2 heures **Coefficient : 2**

EXERCICE **8 points**

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \cdot \text{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x \cdot \text{e}^{-x} \quad \left(\text{On rappelle que } \text{e}^{-x} = \frac{1}{\text{e}^x}\right).$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unités graphiques 4 cm. On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans ce repère.
La courbe $\mathscr{C}_g$ est tracée sur la feuille annexe qu'il faudra compléter et rendre avec la copie.

I. Étude de la fonction f .

1. Déterminer la limite de la fonction f au voisinage de $-\infty$.
2. On admet que la limite de la fonction f au voisinage de $+\infty$ est égale à 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$ et montrer que la fonction f a le même signe que $2x - x^2$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.
5. Sur la feuille annexe, tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le même repère.

II. Étude des positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Déterminer graphiquement sur quels intervalles la courbe $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus la courbe $\mathscr{C}_f$.

PROBLÈME **12 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 4\ln x - x + 2.$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en 0.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

   b. Montrer que $f(x) = x\left(4\dfrac{\ln x}{x} - 1 + \dfrac{2}{x}\right)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$.

   En déduire la limite de f en $+\infty$. (On rappelle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$).
2. On désigne par f' la fonction dérivée de f.

   a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0\,;\ +\infty[$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$.
3. **a.** Déterminer la valeur exacte de $f(2)$ et de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ en fonction de $\ln 2$.

   b. Déterminer la valeur exacte de $f(\text{e})$ et de $f\left(\text{e}^2\right)$ en fonction de e.

c. Résoudre dans $]0~;~+\infty[$ l'équation $f(x) = -x - 2$.

4. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant : (On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.)

x	0,5	1	2	3	4	5	7	11	17
$f(x)$									

5. Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$

6. Dans le même repère, tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x - 2$.
Comment peut-on graphiquement retrouver le résultat de la question **3. c.** ?

7. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$F(x) = 4x\ln x - 2x - \frac{x^2}{2}.$$

a. Démontrer que F est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

b. Calculer $\text{I} = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\text{d}x$. En donner la valeur exacte en fonction de $\ln 2$.

À RENDRE AVEC LA COPIE