

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Gabon juin 1976 ∞

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = (-x)^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \in]-\infty; -1] \\ f(x) = ax + b & \text{si } x \in [-1; +\infty[\end{cases}$$

Comment peut-on choisir les réels a et b pour que la fonction f soit

1. continue en -1 ?
2. dérivable en -1 ?

Pour les valeurs trouvées en 2., on étudiera la fonction f et l'on tracera la courbe représentative (\mathcal{C}) de f dans un repère orthonormé du plan affine.

EXERCICE 2

Dans le plan complexe, on considère l'application f qui au point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ défini par :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})\bar{z} + i$$

Démontrer que f est une similitude inverse dont on précisera le rapport k , le centre C et l'axe D .

PROBLÈME

On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 sur \mathbb{R} , rapporté à une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) et par \mathcal{E} un espace affine euclidien sur E rapporté à un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Pour tout couple $(u; b)$ de nombres réels, on considère l'application $f_{(u; b)}$ de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'; y')$ dans le même repère, x' et y' vérifiant les relations :

$$\begin{cases} x' = x + u \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

1. Montrer que $f_{(u; b)}$ est un antidéplacement de \mathcal{E} .
2. Caractériser l'application $f_{(0; b)}$.

3. On se place dans le cas où u est un réel non nul.
 $f(u; b)$ possède-t-elle des points invariants?
 Montrer que $f(u; b)$ peut se décomposer en le produit d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine D et d'une translation de vecteur \vec{V} colinéaire à D . (On déterminera l'équation de D et les coordonnées de \vec{V} en fonction de u et b).
 Cette décomposition est-elle unique? Le produit est-il commutatif?
4. $(u; b)$ et $(u'; b')$ étant deux couples de nombres réels quelconques, déterminer l'application $f(u'; b') \circ f(u; b)$. Ce produit est-il commutatif?
 Déterminer l'application réciproque de $f(u; b)$.
5. On considère l'ensemble P de toutes les applications $f(u; b)$ quand $(u; b)$ décrit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et l'ensemble Q de toutes les translations de \mathcal{E} .
 Montrer que l'ensemble $F = P \cup Q$ muni de la loi de composition des applications est un groupe non commutatif.

Partie B

Pour tout nombre réel φ appartenant à l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et pour tout couple $(u; b)$ de nombres réels, on considère l'application $f_{(\varphi, u, b)}$ de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'; y')$ dans le même repère, x' et y' vérifiant les relations :

$$\begin{cases} x' &= x \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi + u - b \sin 2\varphi \\ y' &= x \sin 2\varphi - y \cos 2\varphi + 2b \cos^2 \varphi + u \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$$

1. Que peut-on dire de l'application $f_{(0, u, b)}$?
2. Pour φ différent de zéro, caractériser l'endomorphisme associé à l'application affine $f_{(\varphi, u, b)}$ en montrant que l'ensemble des vecteurs invariants, par cet endomorphisme est la droite vectorielle \mathcal{D} d'équation : $y = x \operatorname{tg} \varphi$.
3. Pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$, caractériser l'application $f_{(\pi/4, u, b)}$.
4. Revenant au cas général, en posant $a = \operatorname{tg} \varphi$, exprimer x' et y' en fonction de a , b et u .
 Montrer que si $u = 0$ tout point de la droite D d'équation $y = ax + b$ est invariant. En déduire la nature de l'application affine $f_{(\varphi, 0, b)}$.
 Enfin Si u est différent de 0, montrer que $f_{(\varphi, u, b)}$ est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à la droite affine D d'équation $y = ax + b$ (avec $a = \operatorname{tg} \varphi$) et d'une translation de vecteur \vec{V} colinéaire à D .